Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

(ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր)

Երևան
Էդիթ Պրինտ
2010

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)
ԳՄԴ 22.1 ց72
Գ 479

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Մասնագիտական խմբագիր՝ Է. Այվազյան
Խմբագիր՝ Հ. Գուլակյան
Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն. Գևորգյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Օհանջանյանի

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.
Գ 479 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպր. 11-րդ դաս. դասագիրք (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար)/ Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան; Խմբ.՝ Հ. Գուլակյանն.- Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2010.- 128 էջ:

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)
ԳՄԴ 22.1 ց72

ISBN 978-9939-52-225-8

Գլուխ 1

Աստիճանային և ցուցչային ֆունկցիաներ

Աստիճանային ֆունկցիա

Աստիճանային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=x^a$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a -ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է:

Մենք կուսումնասիրենք աստիճանային ֆունկցիաները միայն այն դեպքում, երբ $a=n$, կամ $a=1/n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Դուք արդեն ծանոթ եք այնպիսի աստիճանային ֆունկցիաների հատկություններին, ինչպիսիք են՝

ա) $f(x)=x$ գծային ֆունկցիան ($a=1$),

բ) $f(x)=x^2$ քառակուսային ֆունկցիան ($a=2$):

Հիշենք նաև, որ աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկն *ա* դեպքում կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է, իսկ *բ* դեպքում՝ (0,0) գագաթով պարաբոլ:

§1. Բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա

Ինչպես կտեսնենք ստորև, բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան իր շատ հատկություններով նման է գծային ֆունկցիային, երբ n-ը կենտ է, և քառակուսային ֆունկցիային՝ երբ n-ը զույգ է:

Նախ ուսումնասիրենք $f(x)=x^n$ աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններն այն դեպքում, երբ n-ը կենտ է:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է* $D(f)=(-\infty,\infty)$, քանի որ x^n մեծությունը բնական n-ի դեպքում որոշված է կամայական x թվի համար:

2) *Ֆունկցիան կենտ է*, քանի որ կենտ n-ի դեպքում $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո* $f(0)=0$:

4) *Ֆունկցիան դրական է, երբ* $x\in(0,\infty)$ ***և բացասական՝ երբ*** $x\in(-\infty,0)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երրորդ քառորդներում է:*

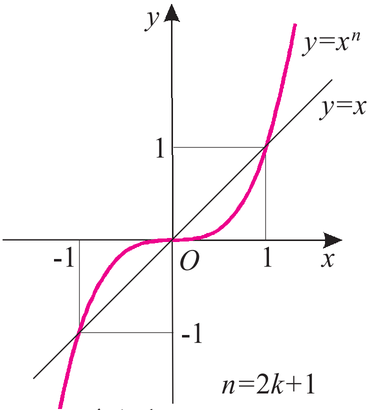
* Այստեղ և հետագայում նկատի ունենք ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերը, որոնք չեն պատկանում կոորդինատային առանցքներին: Վերջիններս, ինչպես գիտենք, ոչ մի քառորդում ընկած չեն:

5) *Ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա:*

6) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է՝* $\boldsymbol{E(f)=(-\infty,\infty)}$, քանի որ ֆունկցիան ընդունում է կամայական իրական արժեք ($y\in \mathbf{R}$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x=\sqrt[n]{y}$ կետում):

Հետևաբար՝ ***ֆունկցիան անսահմանափակ է և չունի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներ:***

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y=x$ ուղիղը: Երբ $n=1$, այն համընկնում է այդ ուղղին: Երբ $n>1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0<x<1$ տեղամասում $y=x$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև է (քանի որ այդ դեպքում $0<f(x)=x^n<x$), իսկ $x=1$ կետից աջ՝ այդ ուղղից վերև (այս դեպքում՝ $f(x)=x^n>x$): Արգումենտի անվերջ մեծանալուն զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են:



Նկ. 1

Քանի որ ֆունկցիան կենտ է, նրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Նկարում պատկերված է կենտ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Այժմ քննարկենք

$$f(x)=x^n$$

աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները այն դեպքում, երբ n-ը զույգ է:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է՝* $\boldsymbol{D(f)=(-\infty;\infty)}$:

2) *Ֆունկցիան զույգ է:* Իրոք, զույգ n-ի դեպքում կամայական x-ի համար $f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $\boldsymbol{f(0)=0}$:

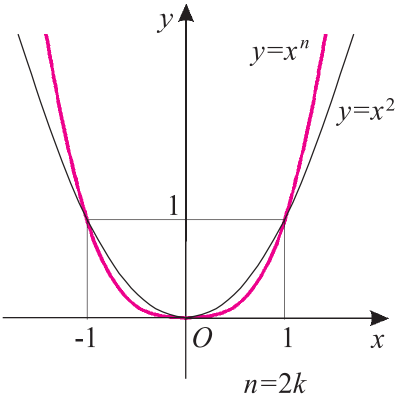
4) *Ֆունկցիան դրական է, երբ* $x\neq 0$ (քանի որ n-ը զույգ է): Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:

5) *Ֆունկցիան նվազում է* $\boldsymbol{(-\infty;0]}$ ***և աճում*** $\boldsymbol{[0;\infty)}$ ***միջակայքերում:***

6) *Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը* $\mathbf{0}$ ***է, որը ֆունկցիան ընդունում է*** $\boldsymbol{x=0}$ ***կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի:***

7) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական թվերի բազմությունն է՝* $\boldsymbol{E(f)=[0,\infty)}$, քանի որ այն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ, մյուս կողմից, կամայական y ոչ բացասական թվի համար ֆունկցիայի արժեքն $x=\sqrt[n]{y}$ կետում y է:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y=x^2$ պարաբոլը: Երբ $n=2$, այն համընկնում է այդ պարաբոլին: Երբ $n>2$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $-1<x<1$ տեղամասում պարաբոլի և աբսցիսների առանցքի միջև է, իսկ $x=1$ կետից աջ և $x=-1$ կետից ձախ՝ պարաբոլից վերև:



Նկ. 2

Կոորդինատների սկզբնակետից արգումենտի անվերջ հեռանալուն զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: 2-րդ նկարում պատկերված է զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում աստիճանային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ե՞րբ է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան զույգ և ե՞րբ՝ կենտ:
4. Որո՞նք են բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
5. Ինչպե՞ս են կախված աստիճանային ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը ցուցիչի զույգ կամ կենտ լինելուց:
6. Ո՞րն է աստիճանային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:
7. Ո՞ր քառորդներում է աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:
8. Կառուցել աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

Առաջադրանքներ

1. Դիցուք $f(x)=x^{26}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(7)$ և $f(8)$, բ) $f(0{,}3)$ և $f(0{,}4)$,

գ) $f(-24)$ և $f(-23)$, դ) $f(-5{,}5)$ և $f(-5{,}4)$,

ե) $f(-52)$ և $f(52)$, զ) $f(-7{,}3)$ և $f(8)$:

2. Դիցուք $f(x)=x^{31}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(13)$ և $f(12)$, բ) $f(0{,}02)$ և $f(0{,}01)$,

գ) $f(-4)$ և $f(-10)$, դ) $f(-9{,}4)$ և $f(-9{,}5)$, ե) $f(-73)$ և $f(73)$,   զ) $f(-5{,}9)$ և $f(6)$:

3. Հետևյալ թվերը դասավորեք աճման կարգով:

ա) $(3{,}4)^2$, $(3{,}4)^5$, $(3{,}4)^3$,   բ) $(0{,}7)^4$, $(0{,}7)^9$, $0{,}7$,

գ) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $\left(\frac{2}{5}\right)^7$, $\left(\frac{2}{5}\right)^5$,   դ) $\left(\frac{9}{8}\right)^4$, $\left(\frac{9}{8}\right)^7$, $\frac{9}{8}$:

4. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել մոնոտոնության ու նշանապահպանման միջակայքերը:

ա) $f(x)=x^4$,   բ) $f(x)=x^3$,   գ) $f(x)=(x-1)^4$,

դ) $f(x)=(x+1)^3$,   ե) $f(x)=(x-1)^4+2$,   զ) $f(x)=(x+1)^3-8$:

5. Օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից՝ գտնել անհավասարությանը բավարարող x-երի բազմությունը:

ա) $x^{11}>0$,   բ) $x^9\le 0$,   գ) $x^{10}>0$,

դ) $x^6\le 0$,   ե) $x^{12}\ge 0$,   զ) $x^{10}>-53$,

է) $x^8\le -30$,   ը) $x^5>-32$,   թ) $x^3\le -125$:

6. Լուծել հավասարումը՝ օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից:

ա) $x^{12}=1$,   բ) $x^5=3^5$,   գ) $x^6=7^6$,

դ) $x^5=-x^7$,   ե) $x^{15}=x^9$,   զ) $x^8=x^2$:

7. Լուծել անհավասարումը՝ օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից:

ա) $x^2<4$,   բ) $x^2>0{,}25$,   գ) $x^3>\frac{1}{8}$:

Կրկնության համար

8. Պարզեցնել արտահայտությունը:

ա) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$,   բ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$,   գ) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$:

§2. $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան և նրա հատկությունները

Արդեն ծանոթ ենք կոտորակային ցուցիչով աստիճանին և գիտենք, որ x թվի $\frac{m}{n}$ աստիճանը, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են, սահմանվում է ոչ բացասական x թվի համար՝ որպես n աստիճանի արմատ x^m թվից՝

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}: \qquad (1)$$

Այժմ նշենք $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական կիսաառանցքն է՝* $D(f)=[0;\infty)$:

2) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական կիսաառանցքն է* $E(f)=[0;\infty)$, քանի որ նրա արժեքները փոքր չեն 0-ից, իսկ կամայական $y\geq 0$ արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x=y^n$ կետում:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $f(0)=0$ ***և դրական է, երբ*** $x\in(0,\infty)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում է:

4) *Ֆունկցիան աճող է իր որոշման տիրույթում*, քանի որ $0\leq x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $\sqrt[n]{x_1}<\sqrt[n]{x_2}$:

5) *Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը* 0 ***է, որը ֆունկցիան ընդունում է*** $x=0$ ***կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի***:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y=x$ ուղիղը: Երբ $n=1$, այն համընկնում է այդ ուղղին:

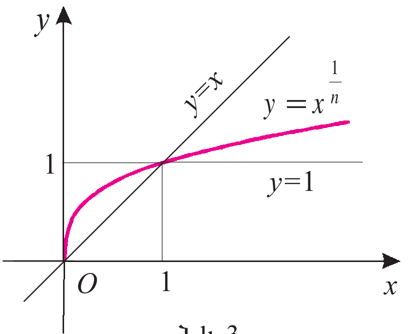
Երբ $n>1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0<x<1$ տեղամասում $y=x$ ուղղից վերև է, քանի որ

$$0<x<1\Rightarrow\sqrt[n]{x}>x:$$

Իսկ $x=1$ կետից աջ ֆունկցիայի գրաֆիկը կգտնվի $y=x$ և $y=1$ ուղիղների միջև, քանի որ

$$x>1\Rightarrow 1<\sqrt[n]{x}<x:$$

Արգումենտի անվերջ մեծանալուն զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Նկարում պատկերված է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:



Նկ. 3

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր թվերի համար և ինչպե՞ս է սահմանվում թվի կոտորակային ցուցիչով աստիճանը:
2. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞ր քառորդում է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
4. Մոնոտո՞ն է արդյոք $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիան:
5. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
6. Կառուցել $f(x)=x^{1/3}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

9. Դիցուք $f(x)=x^{\frac{1}{7}}$: Բաղդատել թվերը:

ա) $f(15)$ և $f(14)$, բ) $f(5{,}3)$ և $f(5{,}4)$, գ) $f(0)$ և $f(8{,}3)$:

10. Դիցուք $f(x)=\sqrt[15]{x}$: Բաղդատել թվերը:

ա) $f(9)$ և $f(7)$, բ) $f(7{,}09)$ և $f(7{,}1)$, գ) $f(-22)$ և $f(-20)$,

դ) $f(-3{,}2)$ և $f(-3{,}1)$, ե) $f(-23)$ և $f(23)$, զ) $f(-8{,}1)$ և $f(6{,}2)$:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (11-12):

11. ա) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, գ) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$, դ) $f(x)=\sqrt[4]{x}$:

12. ա) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{\frac{1}{5}}$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2x-4}}$,

գ) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{8x}{2x^2-3x+1}}$, դ) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{5x-10}{x^2-5x+4}}$:

13. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը:

ա) $f(x)=\sqrt{x}$, բ) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, գ) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$,

դ) $f(x)=-x^{\frac{1}{4}}$, ➤ե) $f(x)=\sqrt[5]{x}+3$, ➤զ) $f(x)=\sqrt[3]{x}-8$:

14. Լուծել հավասարումը:

ա) $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{7}$, բ) $x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{4}$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=5$,

դ) $\sqrt[3]{x}=-3$, ե) $\sqrt[6]{x}=8^{\frac{1}{2}}$, զ) $x^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{3}}$:

Կրկնության համար

➤**15.** Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար բարձրացրին 10 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով բարձրացավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

➤**16.** Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար իջեցրին 10 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով իջավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

§3. Ցուցչային ֆունկցիա

Ցուցչային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=a^x$$

ֆունկցիան, որտեղ a -ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք ցուցչային ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները և կառուցենք գրաֆիկը:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն իրական թվերի բազմությունն է*** $D(f)=(-\infty,\infty)$:

2) ***Ֆունկցիան դրական է ամբողջ թվային առանցքի վրա***: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:

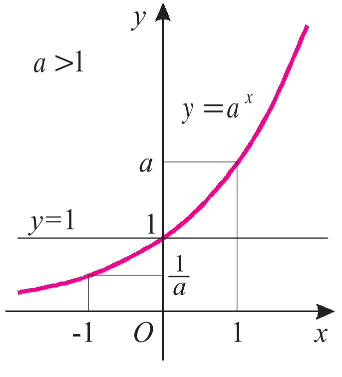
3) ***Ֆունկցիան մոնոտոն է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ընդ որում, այն աճող է, եթե*** $a>1$, ***և նվազող՝ եթե*** $0<a<1$:

4) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը դրական կիսաառանցքն է*** $E(f)=(0,\infty)$:

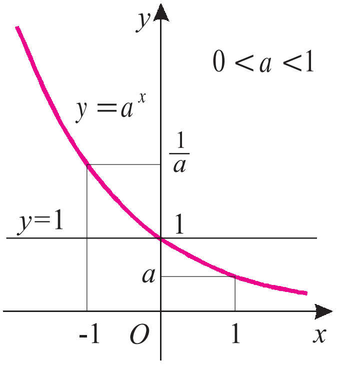
5) ***Ֆունկցիան չունի զրոներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:***

6) ***Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը*** $(0, 1)$ ***կետում, քանի որ*** $a^0=1$:

$a>1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում $y=1$ ուղղից վերև է, և դեպի աջ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Երկրորդ քառորդում այն $y=1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև է և դեպի ձախ՝ անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին (նկ. 4, *ա*).



Նկ. 4



$0<a<1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում $y=1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև է և դեպի աջ անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին: Երկրորդ քառորդում այն $y=1$ ուղղից վերև է, և դեպի ձախ՝ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են (նկ. 4, *բ*):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում ցուցչային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞ր քառորդներում է ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկը:

4. Ե՞րբ է ցուցչային ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:

5. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

6. Կառուցել $y=3^x$ և $y=(1/3)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Առաջադրանքներ

17. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և գտնել արժեքների բազմությունը:

ա) $y=2^x$, բ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, գ) $y=-5^x$,

դ) $y=(1{,}5)^x-4$, ե) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+5$, զ) $y=-3^{\frac{x}{2}}+1$:

18. Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա՝ 1) աճում է, 2) նվազում է:

ա) $f(x)=a^x$, բ) $f(x)=(a-1)^x$,

գ) $f(x)=(2a+3)^x$, դ) $f(x)=|a|^x$:

➢19. Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի՞ լուծում ունի հավասարումը:

ա) $7^x=5$, բ) $(0{,}1)^x-3=0$, գ) $4+\left(\sqrt{3}\right)^x=0$,

20. Բանկում դրվել է 1000000 դրամ ավանդ՝ տարեկան 10 % տոկոսադրույքով, բարդ տոկոսի հաշվարկով (այսինքն՝ յուրաքանչյուր տարվա վերջում տարեսկզբում եղած գումարն ավելանում է 10 %-ով):

ա) Որքա՞ն գումար կլինի այդ հաշվի վրա 1 տարի անց:

բ) Որքա՞ն եկամուտ կունենա ավանդատուն 2 տարի անց:

գ) Գտեք ավանդի գումարի ֆունկցիոնալ կախվածությունը տարիների քանակից:

դ) Քանի՞ տարի անց գումարը կգերազանցի 1450000 դրամը:

➢21. Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները.

ա) $y=6^{\sqrt{x}}$, բ) $y=(0{,}1)^{x^2}$, գ) $y=3^{\sin x}-\frac{1}{3}$:

➢22. Գրաֆիկորեն ցույց տալ, որ հավասարման լուծումն է՝ $x=0$:

ա) $5^x=1-x$, բ) $(0{,}3)^x=2x+1$, գ) $\left(\sqrt{5}\right)^{-x}-1=0{,}3x$:

23. Արտահայտությունը ձևափոխել $c\cdot a^x$ տեսքի.

ա) $3^{x+3}\cdot 9^{2x-1}$, բ) $6^{x+2}\cdot 2^{3x-1}$, գ) $5^{x+3}\cdot(0{,}1)^{2-x}$,

դ) $(0{,}5)^{1-5x}\cdot 3^{2x+4}$, ե) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{6x+3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2x-1}$, զ) $\left(\sqrt{125}\right)^{4x-2}\cdot 5^{5-3x}$:

➢24. Հաշվել արտահայտության արժեքը տրված պայմանի դեպքում:

ա) 4^x+4^{-x}, եթե $2^x+2^{-x}=7$,

բ) $5^{2x}+5^{-2x}$, եթե $5^x+(0{,}2)^x=3$, գ) $9^x+\frac{1}{9^x}$, եթե $3^x+\frac{1}{3^x}=5$:

Կրկնության համար

25. Ապացուցել նույնությունը:

ա) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$, բ) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$:

26. Գտնել արտահայտության արժեքը:

ա) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$, բ) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{2}{5}\right)$,

գ) $\cos\left(2\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)$, դ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{6}\right)$:

§4. Ցուցչային հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն ցուցչային հավասարումը***՝

$$a^x=b, \tag{1}$$

որտեղ $a>0$, $a\neq 1$: Քանի որ $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը դրական թվերի բազմությունն է, ուրեմն՝

եթե $b\leq 0$, ապա $a^x=b$ հավասարումը լուծում չունի,
եթե $b>0$, ապա $a^x=b$ հավասարումն ունի միակ լուծում:

Լուծման միակությունը բխում է ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոն լինելուց, քանի որ մոնոտոն ֆունկցիան չի կարող տարբեր կետերում ընդունել միևնույն՝ b արժեքը:

Այդ լուծումը գտնելու համար b թիվը ներկայացնում ենք a հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $b=a^c$ և հանգում

$$a^x=a^c$$

հավասարմանը, իսկ վերջինիս լուծումն է՝ $x=c$:

Օրինակ 1: Լուծենք $2^x=4\sqrt[5]{16}$ հավասարումը:

Քանի որ $4\sqrt[5]{16}=2^{2+\frac{4}{5}}=2^{2{,}8}$, այն համարժեք է $2^x=2^{2{,}8}$ հավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x=2{,}8$:

Պատասխան՝ 2,8 :

Այն դեպքում, երբ (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող արտահայտություն, լուծումը գտնում են նման ձևով:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$(0{,}2)^{2x^2-8x}=125\sqrt{5}$$

հավասարումը: Գրելով այն

$$5^{-\left(2x^2-8x\right)}=5^{3{,}5}$$

տեսքով՝ կստանանք

$$2x^2-8x+3{,}5=0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝ $x_1=0{,}5$, $x_2=3{,}5$:

Պատասխան՝ $0{,}5;\ 3{,}5$:

Ստորև կքննարկենք ցուցչային հավասարումների մի քանի՝ առավել հաճախ հանդիպող տեսակներ:

ա) Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են պարզագույն ցուցչային հավասարման:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\frac{3}{4}\cdot 2^{x+3}+10\cdot 2^{x-1}=\frac{11}{8}$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$2^{x-1}\left(\frac{3}{4}\cdot 2^4+10\right)=\frac{11}{8}$$

հավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$2^{x-1}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow 2^{x-1}=2^{-4}\Leftrightarrow x-1=-4\Leftrightarrow x=-3:$$

Պատասխան՝ -3:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{x}=20\cdot 3^{x-3}$$

հավասարումը: Ձևափոխելով՝ ստանում ենք՝

$$\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)^{x}=\frac{20}{27}\cdot 3^x \ \Leftrightarrow\ 2^x=\frac{8}{27}\cdot 3^x:$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բաժանելով 3^x-ի՝ կստանանք

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումը, որի լուծումն է՝ $x=3$:

Պատասխան՝ 3:

բ) Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտա-

գործմամբ բերվում են

$$a^{2x}+p\cdot a^{x}+q=0 \qquad (2)$$

տեսքի հավասարման:

Վերջինս $a^{x}=t$ տեղադրմամբ հանգում է $t^{2}+pt+q=0$ քառակուսային հավասարմանը:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$9^{x}-24\cdot 3^{x-2}=1$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$3^{2x}-24\cdot\frac{1}{3^{2}}\cdot 3^{x}=1$$

հավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$3\cdot 3^{2x}-8\cdot 3^{x}-3=0:$$

Նշանակելով $3^{x}=t$, կստանանք

$$3t^{2}-8t-3=0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝

$$t_1=-1/3,\ \ t_2=3:$$

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք

$$3^{x}=-\frac{1}{3} \text{ և } 3^{x}=3$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, քանի որ $3^{x}>0$, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x=1$:

Պատասխան՝ 1:

գ) ***Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են***

$$c^{2x}+p\cdot c^{x}\cdot d^{x}+q\cdot d^{2x}=0 \qquad (3)$$

տեսքի համասեռ հավասարման:

Քանի որ $d^{2x}>0$ բոլոր x-երի դեպքում, (3) հավասարման երկու մասերը բաժանելով d^{2x}-ի և նշանակելով $\left(\frac{c}{d}\right)^{x}=t$, կստանանք նրան համարժեք

$$t^{2}+pt+q=0$$

քառակուսային հավասարումը:

Օրինակ 6: Լուծենք

$$9^{x+1}+5\cdot 6^{x}-4^{x+1}=0$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$9\cdot 9^x+5\cdot 3^x\cdot 2^x-4\cdot 4^x=0$$

հավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 4^x-ի՝ կստանանք՝

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-4=0:$$

Նշանակելով $(3/2)^x=t$, հանգում ենք $9t^2+5t-4=0$ քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $t_1=-1$, $t_2=4/9$: Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1 \text{ և } \left(\frac{3}{2}\right)^x=4/9$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x=-2$:

Պատասխան՝ -2:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն ցուցչային հավասարումը:
2. Քանի՞ լուծում ունի (1) հավասարումը, եթե՝ ա) $b>0$, բ) $b\le 0$:
3. Ինչպե՞ս են լուծում (2) ցուցչային հավասարումը:
4. Ինչպե՞ս են լուծում (3) ցուցչային հավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (27-28):

27. ա) $2^x=32$, բ) $5^x=0{,}2$, գ) $(0{,}2)^x=\sqrt{5}$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt[3]{3}$:

28. ա) $3^{x+2}=81$, բ) $(0{,}2)^{x-3}=125$, գ) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-5}=27$,

դ) $\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{2-x}=32$, ե) $(0{,}25)^{2x-1}=64$, զ) $(0{,}125)^{3-x}=2\sqrt{2}$:

29. Պարզել հավասարման արմատի նշանը:

ա) $2^x=7$, բ) $3^x=0{,}6$, գ) $(0{,}2)^x=6{,}3$, դ) $(0{,}9)^x=9$:

Լուծել հավասարումը (30-38):

30. ա) $6^{3x+2}=6^{2x+7}$, բ) $5^{4x+1}=(0{,}2)^{x-6}$,

գ) $4^{x+2}=2\cdot 8^{x-1}$, դ) $25^{x-0{,}5}=125\left(\sqrt{0{,}2}\right)^{3-x}$:

31. ա) $5^{x+2}-9\cdot 5^{x-1}=116$,   բ) $10\cdot(0{,}5)^{x}-2^{3-x}=64$,

գ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}=138$,   դ) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1}+4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}=40$,

ե) $5^{x}+5^{x+1}-5^{x-1}=725$,   զ) $3^{2x-1}-9^{x-1}+27^{\frac{2}{3}x-1}=567$:

32. ա) $7^{x}\cdot 2^{x-1}=98$,   բ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x-1}=\frac{3}{8}$,

գ) $\dfrac{2^{x+3}\cdot 25^{x-1}}{4^{x}\cdot 5^{x}}=5$,   դ) $\dfrac{(0{,}04)^{x}\cdot 9^{x-1}}{3^{3x}}=625$:

33. ա) $9^{x-1}=2^{x-1}$,   բ) $9\cdot 5^{x-1}-3^{x+1}=0$,

դ) $5^{2x+6}=3^{3x+9}$,   ե) $(0{,}2)^{3x-6}=(0{,}5)^{4x-8}$:

34. ա) $2^{x-1}-3^{x}=3^{x-1}-2^{x+2}$,   բ) $4^{x}+9^{x+1}=2\cdot 4^{x+1}-\frac{3}{2}\cdot 9^{x}$,

գ) $2^{x+3}-7^{x-2}=7^{x-1}+2^{x}$,   դ) $11^{x-1}-7^{x-1}=4\left(11^{x-2}+7^{x-2}\right)$:

35. ա) $10^{2x+13}=2^{x+26}\cdot 5^{3x}$,   բ) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=3\sqrt{2^{x}}$,

գ) $8^{x-1}\cdot 9^{2x-3}=6^{x+3}$,   դ) $3^{x+26}\cdot 125^{x}=15^{2x+13}$:

36. ա) $3^{2x}-80\cdot 3^{x}-81=0$,   բ) $49^{x}-6\cdot 7^{x}-7=0$,

գ) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6=0$,   դ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2}=8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+9$:

37. ա) $2^{x}-6\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x}-16=0$,   բ) $3^{1+\sqrt{x}}+3^{1-\sqrt{x}}=10$,

գ) $18^{x}+27\cdot 2^{3-x}=14\cdot 3^{x+1}$,   դ) $5\cdot 5^{x}-24=25\cdot(0{,}2)^{x+1}$:

38. ա) $9^{x}+6^{x}=2\cdot 4^{x}$,   բ) $4\cdot 9^{x}+12^{x}=3\cdot 4^{2x}$,

գ) $9\cdot 9^{x}+5\cdot 6^{x}=4^{x+1}$,   դ) $3^{x+4}+45\cdot 6^{\frac{x}{2}}=9\cdot 2^{x+2}$,

ե) $3\cdot 2^{x+1}+2\cdot 3^{x+1}=13\cdot\left(\sqrt{6}\right)^{x}$,   զ) $7\cdot 5^{x}+2\cdot\left(\sqrt{35}\right)^{x}-5\cdot 7^{x}=0$:

➤**39.** Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի լուծում:

ա) $(0{,}3)^{x}=5a-8$,   բ) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+1}=\dfrac{1}{2a+3}$,   գ) $\left(\sqrt{2}\right)^{x}=\dfrac{a}{1-a}$:

Կրկնության համար

40. Լուծել անհավասարումների համակարգը:

ա) $\begin{cases}2x^{2}-3x+1\geq 0\\ 5x-4<0\end{cases}$,   բ) $\begin{cases}5x^{2}+9x-2<0\\ 7x+3\leq 0\end{cases}$,   գ) $\begin{cases}3x^{2}-x-10>0\\ 2x+14\geq 0\end{cases}$:

§5. Ցուցչային անհավասարումներ

Պարզագույն ցուցչային անհավասարումներ են

$$a^x > b \quad \text{և} \quad a^x < b \qquad (1)$$

անհավասարումները, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

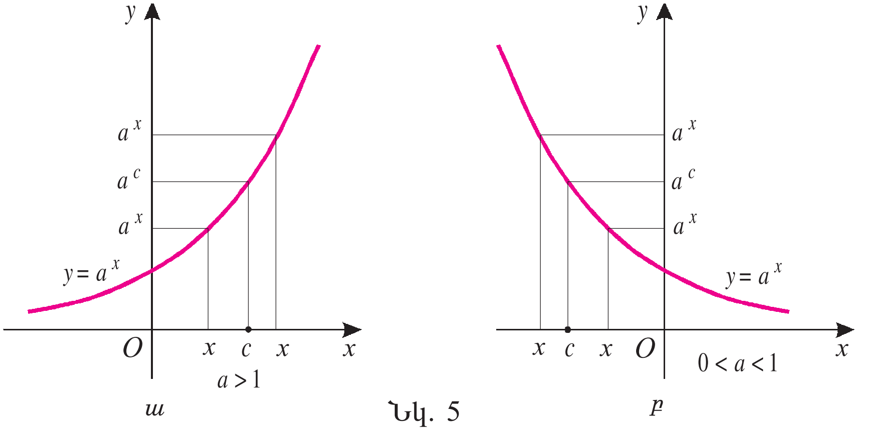
Նախ քննարկենք $b \le 0$ դեպքը: Գիտենք, որ a^x մեծությունը կամայական x թվի համար դրական է: Հետևաբար՝

Եթե $b \le 0$, ապա $a^x > b$ անհավասարման լուծումն է՝ $(-\infty, \infty)$,
եթե $b \le 0$, ապա $a^x < b$ անհավասարումը լուծում չունի:

Լուծումները նույնն են նաև ոչ խիստ անհավասարումների դեպքում:

Երբ b-ն դրական է, հարկավոր է այն ներկայացնել a հիմքով աստիճանով՝ $b = a^c$, որից հետո (1) անհավասարումները կստանան $a^x > a^c$ և $a^x < a^c$ տեսքերը:

Ենթադրենք $a > 1$: Քանի որ $f(x) = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ c կետում նրա արժեքը a^c է, ուրեմն՝ $x > c$ դեպքում կունենանք՝ $a^x > a^c$, իսկ $x < c$ դեպքում՝ $a^x < a^c$ (նկ. 5, *ա*): Հետևաբար՝



Նկ. 5

Եթե $a > 1$, ապա՝
ա) $a^x > a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x > c$,
բ) $a^x < a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x < c$:

Հանգունորեն, հաշվի առնելով, որ $0 < a < 1$ դեպքում $f(x) = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան նվազում է ամբողջ թվային առանցքի վրա (նկ. 5, *բ*), կստանանք՝

Եթե $0 < a < 1$, ապա՝
ա) $a^x > a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x < c$,
բ) $a^x < a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x > c$:

Նույն ձևով են լուծվում նաև պարզագույն ոչ խիստ անհավասարումները.

Տրված ցուցչային անհավասարումը պարզագույն անհավասարման հանգեցնելու համար կիրառվում են այն մեթոդները, որոնց ծանոթացանք ցուցչային հավասարումներ լուծելիս:

Այստեղ կարևոր է նշել, որ անհավասարման երկու կողմերը a^x-ի բաժանելուց ստացված անհավասարումը համարժեք է սկզբնականին, քանի որ $a^x > 0$ ամբողջ թվային առանցքի վրա: Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > 7$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \cdot \left(3 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) > 7$$

անհավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \cdot \frac{21}{4} > 7 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \Leftrightarrow x-3 < -1 \Leftrightarrow x < 2:$$

Պատասխան՝ $(-\infty, 2)$:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$4^{x+1} - 9 \cdot 2^{x+2} + 32 \geq 0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$4 \cdot 2^{2x} - 36 \cdot 2^x + 32 \geq 0$$

անհավասարմանը, որը $2^x = t$ նշանակումով հանգում է

$$t^2 - 9t + 8 \geq 0$$

քառակուսային անհավասարմանը: Գտնելով $t^2 - 9t + 8 = 0$ հավասարման արմատները՝ $t_1 = 1$, $t_2 = 8$, կստանանք՝

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \leq 1 \\ 2^x \geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; \infty):$$

Պատասխան՝ $(-\infty; 0] \cup [3; \infty)$:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$25^x + 8 \cdot 15^x - 3^{2x+2} \leq 0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$5^{2x} + 8 \cdot 15^x - 9 \cdot 3^{2x} \leq 0$$

անհավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 3^{2x}-ի՝ կունենանք՝

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}-9\le 0:$$

Նշանակելով $(5/3)^x=t$, կստանանք՝

$$t^2+8t-9\le 0$$

քառակուսային անհավասարումը, որը համարժեք է

$$\begin{cases}t\ge -9\\ t\le 1\end{cases}$$

համակարգին: Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք՝

$$\begin{cases}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\ge -9\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\le\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;\infty)\\ x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow(-\infty;0]:$$

Պատասխան՝ $(-\infty,0]$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո րո՞նք են պարզագույն ցուցչային անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $a^x>b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\le 0$:
3. Ո՞րն է $a^x<b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\le 0$:
4. Ո՞րն է $a^x>a^c$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:
5. Ո՞րն է $a^x\le a^c$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (41-50):

41. ա) $2^x<16$, բ) $5^x\ge 0{,}2$, գ) $(0{,}2)^x<125$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\ge 64$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{9}{4}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 27$,

է) $(0{,}25)^x>16$, ը) $\left(\sqrt{2}\right)^x\ge 0{,}125$, թ) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^x<0{,}04$:

42. ա) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+1}<49$, բ) $(0{,}2)^{x-1}<25$, գ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{x+2}\le 27$,

դ) $\left(\frac{49}{\sqrt{7}}\right)^{3-5x}>\frac{1}{343}$, ե) $2^{|2x+3|}<0{,}25$, զ) $(0{,}2)^{|2x-5|}>125$:

➤**43.** ա) $3^{x+1}\cdot 5^{x-2}<27$, բ) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^{x-3}\ge 32$,

գ) $\left(\frac{5}{9}\right)^{x-7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x}\le\frac{16}{45}$, դ) $\left(\frac{27}{25}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-1}>\frac{5}{81}$:

44. ա) $2^{3x^2+x-6} > 0{,}25$, բ) $\left(\frac{\sqrt[3]{32}}{8}\right)^{2x^2+3x-2} \le \frac{1}{16}$, գ) $(1{,}5)^{|5x-3|-6} \le \frac{8}{27}$,

դ) $(0{,}6)^{3-|x+7|} > \frac{25}{9}$, ե) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{x+1}} > 1{,}44$, զ) $81\cdot(1{,}8)^{\sqrt{x^2-9}-6} > 25$:

45. ա) $3\cdot 2^{x+2} - 5\cdot 2^{x-1} \ge 19$, բ) $7\cdot 3^{x-3} - 6\cdot 3^{x-4} < 5$,

գ) $8\cdot(0{,}8)^{x-1} - 5\cdot(0{,}8)^{x+1} < 7{,}5$, դ) $2^{3-x} - 7\cdot(0{,}5)^{x} \le 8$:

46. ա) $4\cdot 6^{x} \ge 9\cdot 4^{x}$, բ) $(2{,}5)^{x} - 4\cdot 5^{x} < 0$,

գ) $2^{3x} - 1{,}25\cdot 10^{x} \ge 0$, դ) $\frac{1}{10^{x}} > 8\cdot 5^{-x}$:

47. ա) $9^{-x} < \frac{16}{6^{x+2}}$, բ) $2^{\frac{x}{2}-1} \le 3^{2x-4}$,

գ) $10^{2x-5} > 5^{x-2}\cdot 8^{x-\frac{8}{3}}$, դ) $15^{2x-1} < 27^{x-1}\cdot 5^{x+1}$:

48. ա) $2^{x+2} + 3^{x-5} < 3^{x-1} + 2^{x-2}$, բ) $5^{x+10} - 3^{x+10} \ge 3^{x+12} - 5^{x+11}$,

գ) $3^{x+6} - 7^{x+4} < 2\left(3^{x+4} + 7^{x+3}\right)$, դ) $3^{x} - 5^{x-2} \ge 2\left(3^{x-3} + 5^{x-4}\right)$:

49. ա) $9\cdot 3^{2x} - 82\cdot 3^{x} + 9 \ge 0$, բ) $4\cdot 4^{x} - 65\cdot 2^{x} + 16 < 0$,

գ) $3^{1-2x} - 82\cdot 3^{-x-1} + 3 \ge 0$, դ) $5^{x-3} + 5\cdot(0{,}2)^{x-4} \le 26$:

50. ա) $2^{2x} + 5\cdot 6^{x-1} \ge 9^{x}$, բ) $3\cdot 5^{2x-1} + 0{,}4\cdot 15^{x} \ge 9^{x}$,

գ) $3\cdot 4^{1-x} + 2\cdot 9^{1-x} < 35\cdot 6^{-x}$, դ) $7\cdot 3^{x+1} + 3\cdot 7^{x+1} \ge 58\cdot 21^{\frac{x}{2}}$:

51. ա) $5\cdot 2^{x} + 8\cdot 5^{x-2} < 2{,}8\cdot\left(\sqrt{10}\right)^{x}$, բ) $49^{-x} + 49\cdot 25^{-x-1} \ge 2{,}96\cdot 35^{-x}$:

Կրկնության համար

52. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան գետափնյա նավամատույցից: Հոսանքի ուղղությամբ մեկ ժամ լողալուց հետո նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

53. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավամատույցից: Հոսանքին հակառակ երկու ժամ լողալուց հետո նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

54. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավամատույցից: Երբ լաստը նավամատույցից հեռու էր 3կմ, նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից ի՞նչ հեռավորությամբ նավակը կհանդիպի լաստին:

Գլուխ 2
Լոգարիթմական ֆունկցիա

§1. Լոգարիթմի սահմանումը

Նախորդ գլխում տեսանք, որ $2^x = b$ հավասարումը կամայական դրական b-ի դեպքում ունի միակ արմատ: Որոշ b-երի համար կարող ենք գրել, թե որն է այդ արմատը: Օրինակ՝ եթե $b = 8$, ապա հավասարման արմատն է՝ $x = 3$: Իսկ ո՞րն է, օրինակ՝ $2^x = 7$ հավասարման արմատը, այսինքն՝ ի՞նչ աստիճան պետք է բարձրացնել 2 թիվը՝ 7 ստանալու համար: Այս հարցին պատասխանելու համար ներմուծվում է «լոգարիթմ» հասկացությունը:

b թվի լոգարիթմ a հիմքով, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, կոչվում է այն թիվը, որով պետք է աստիճան բարձրացնել a հիմքը՝ b թիվը ստանալու համար:

b թվի լոգարիթմը a հիմքով նշանակում են՝ $\log_a b$ (կարդացվում է՝ ***լոգարիթմ a հիմքով b***): Այլ խոսքով՝ $\log_a b$ թիվը

$$a^x = b$$

հավասարման արմատն է, այսինքն՝

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b} : \qquad (1)$$

Մասնավորապես, վերը նշված $2^x = 7$ հավասարման լուծումն է՝ $x = \log_2 7$:

Հիշենք, որ եթե $a > 0$ և $a \neq 1$, ապա $a^x = b$ հավասարումն արմատ չունի, երբ $b \leq 0$, և ունի միակ արմատ, երբ $b > 0$: Հետևաբար՝

$\log_a b$ *արտահայտությունը որոշված է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$:

(1) բանաձևը կոչվում է ***հիմնական լոգարիթմական նույնություն***: Այն ցույց է տալիս, որ

$$\boldsymbol{\log_a b = x \;\Leftrightarrow\; b = a^x} : \qquad (2)$$

Այս համարժեքությունից հետևում են հետևյալ հավասարությունները՝

ա) $\log_a 1 = 0$, բ) $\log_a a = 1$, գ) $\log_a a^m = m$,

որտեղ m -ը կամայական թիվ է:

Եթե լոգարիթմի հիմքը 10 է, ապա $\log_{10} b$ արտահայտությունը կրճատ գրում են՝ $\lg b$, իսկ 10 հիմքով լոգարիթմներն անվանում են ***տասնորդական լոգարիթմներ***:

Օրինակ 1: ա) $\log_3 81 = 4$, քանի որ $81 = 3^4$,

բ) $\log_2 0{,}25 = -2$, քանի որ $0{,}25 = 2^{-2}$,

գ) $\lg 0{,}1 = -1$, քանի որ $0{,}1 = 10^{-1}$:

Օրինակ 2: Գտնենք $\log_{16} 128$ -ը:

Նշանակենք $\log_{16} 128 = x$: Համաձայն (2) համարժեքության՝

$$128 = 16^x,$$

որտեղից՝ $2^7 = 2^{4x}$ և $x = 1{,}75$:

Պատասխան՝ $\log_{16} 128 = 1{,}75$:

Օրինակ 3: Գտնենք x -ը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $\log_3 x = 2$, բ) $\log_2 (x-1) = 4$, գ) $\log_{0,2} x = -2$:

Օգտվելով (2) համարժեքությունից՝ կստանանք՝

ա) $x = 3^2 = 9$,

բ) $x - 1 = 2^4$, որտեղից՝ $x = 17$,

գ) $x = (0{,}2)^{-2} = 25$:

Օրինակ 4: Հաշվենք $9^{-2\log_3 5}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով աստիճանի հատկություններից և (1) նույնությունից՝ ստանում ենք՝

$$9^{-2\log_3 5} = 3^{-4\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-4} = 5^{-4} = \frac{1}{625}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպիսի՞ a և b թվերի համար է սահմանվում b թվի լոգարիթմը a հիմքով:
2. Սահմանեք $\log_a b$ թիվը:
3. Ո՞րն է հիմնական լոգարիթմական նույնությունը:
4. Ո՞րն է $3^x = 12$ հավասարման լուծումը:
5. Որո՞նք են տասնորդական լոգարիթմները:
6. Որո՞նք են արտահայտությունների արժեքները՝ ա) $\log_a 1$, բ) $\log_a a$:
7. Ճշմարի՞տ է արդյոք հավասարությունը՝ ա) $\log_4 64 = 3$, բ) $\log_7 50 = 2$, գ) $\log_{0,2} 5 = -1$:

Առաջադրանքներ

Հաշվել արտահայտության արժեքը (55-58):

55. ա) $\log_3 81$, բ) $\log_2 16$, գ) $\log_{0,1} 1000$, դ) $\lg 0{,}001$:

56. ա) $\log_2 \sqrt[5]{4}$, բ) $\lg \dfrac{100}{\sqrt{10}}$, գ) $\log_5 25\sqrt[3]{5}$, դ) $\log_{\frac{1}{7}} 49\sqrt{7}$:

57. ա) $5^{2\log_5 12}$, բ) $8^{4\log_8 3}$, գ) $7^{0,5\log_7 16}$, դ) $9^{\log_3 8}$:

58. ա) $\log_4 8$, բ) $\log_9 27$, գ) $\log_{25} \dfrac{1}{125}$, դ) $\log_{\frac{1}{16}} \dfrac{1}{8}$:

59. Լուծել հավասարումը:

ա) $8^x = 5$, բ) $(0{,}5)^x = 3$, գ) $10^{-x} = 6$, դ) $2^{x+1} = 9$:

60. Գտնել x թիվը, եթե՝

ա) $\log_6 x = 1$, բ) $\log_5 x = -1$, գ) $\log_{0,2} x = -2$,

դ) $\log_3 (2x-1) = 2$, ե) $\log_2 (x^2+7) = 5$, զ) $\log_{0,5} x^2 = 4$:

61. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

ա) $\log_8 (x^2-9)$, բ) $\lg(1-x^2)$, գ) $\log_{0,5} \dfrac{x-2}{3+x}$:

Կրկնության համար

➢**62.** Ապրանքի գինը բարձրացրին $20\,\%$-ով, այնուհետև նոր գինը իջեցրին $20\,\%$-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

➢**63.** Ապրանքի գինն իջեցրին $20\,\%$-ով, այնուհետև նոր գինը բարձրացրին $20\,\%$-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

§2. Լոգարիթմի հիմնական հատկությունները

Լոգարիթմ պարունակող արտահայտությունները ձևափոխելիս կարևոր դեր են խաղում հետևյալ նույնությունները:

Կամայական $a>0$, $a\neq 1$ հիմքի և կամայական $b>0$, $c>0$ թվերի համար.

I. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,

II. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

III. $\log_a b^m = m\log_a b$, *որտեղ* m*-ը կամայական թիվ է*:

IV. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, *եթե* $c\neq 1$:

Ապացուցման համար օգտվում ենք հիմնական լոգարիթմական նույնությունից, համաձայն որի՝

$$a^{\log_a b} = b\,,\ \ a^{\log_a c} = c\,: \qquad (1)$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունները՝ կստանանք՝

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc\,,$$

որտեղից, նախորդ պարագրաֆի (2) համարժեքության համաձայն, հետևում է I հավասարությունը:

(1) հավասարություններից առաջինը բաժանելով երկրորդին՝ կստանանք՝

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}\,,$$

որը համարժեք է II հավասարությանը:

Ապացուցենք III հավասարությունը: Օգտվելով հիմնական լոգարիթմական նույնությունից և աստիճանի հատկություններից՝ կստանանք՝

$$a^{m\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^m = b^m\,,$$

որը համարժեք է III հավասարությանը:

Ապացուցենք IV նույնությունը, որն անվանում են մի հիմքով լոգարիթմից մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի ***անցման բանաձև***: Նկատենք, որ համաձայն III հավասարության,

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b\,,$$

որտեղից հետևում է IV բանաձևը:

Օրինակ 1: Հաշվենք $\dfrac{\log_3 40 - \log_3 10}{2\log_3 4}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով II-IV նույնություններից՝ կստանանք՝

$$\frac{\log_3 40 - \log_3 10}{2\log_3 4} = \frac{\log_3 4}{\log_3 16} = \log_{16} 4 = \log_{16} 16^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{1}{2}$:

Տրված արտահայտությունը լոգարիթմել a ***հիմքով*** նշանակում է հաշվել այդ արտահայտության լոգարիթմը՝ a հիմքով:

Օրինակ 2: $\dfrac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}$ արտահայտությունը լոգարիթմենք 3 հիմքով:

Օգտվելով I-III նույնություններից՝ կստանանք.

$$\log_3\left(\frac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}\right) = \log_3 9 + \log_3 x^3 + \log_3 \sqrt[5]{y^2} - \log_3 z^2 =$$

$$= 2 + 3\log_3 x + \frac{2}{5}\log_3 y - 2\log_3 z\,:$$

Օրինակ 3: Հաշվենք $\log_{27}\frac{81}{\sqrt{3}}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով անցման բանաձևից, այնուհետև՝ II-III նույնություններից՝ ստանում ենք.

$$\log_{27}\frac{81}{\sqrt{3}}=\frac{\log_3\frac{81}{\sqrt{3}}}{\log_3 27}=\frac{\log_3 81-\log_3\sqrt{3}}{\log_3 27}=\frac{\log_3 3^4-\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^3}=\frac{4-\frac{1}{2}}{3}=\frac{7}{6}$$

Պատասխան՝ $1\frac{1}{6}$:

Լոգարիթմական արտահայտություններ ձևափոխելիս հաճախ օգտակար են լինում նաև հետևյալ նույնությունները.

ա) $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$, **բ)** $\log_a b=\log_{a^p} b^p$, **գ)** $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, (2)

որտեղ a-ն, b-ն դրական, իսկ p-ն, q-ն՝ կամայական թվեր են, ընդ որում, $a\neq 1$, $p\neq 0$, իսկ **գ**-ում՝ նաև $b\neq 1$:

Առաջին նույնությունը հեշտությամբ ապացուցվում է անցման բանաձևի և III հատկության օգնությամբ՝

$$\log_{a^p} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^p}=\frac{1}{p}\log_a b:$$

բ հատկությունը հետևում է **ա**-ից և III-ից, իսկ **գ** հատկությունը՝ անցման բանաձևից:

Օրինակ 4: Գտնենք $\log_a b$-ն, եթե հայտնի է, որ $\log_{\sqrt{b}} a^2b^3=5$:

Օգտվելով լոգարիթմի հիմնական հատկություններից և (2, **ա**)-ից՝ ստանում ենք.

$$\log_{\sqrt{b}} a^2b^3=2\left(\log_b a^2+\log_b b^3\right)=4\log_b a+6=\frac{4}{\log_a b}+6:$$

Հետևաբար՝ $\frac{4}{\log_a b}+6=5$, որտեղից՝ $\log_a b=-4$:

Պատասխան՝ -4:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս հաշվել արտադրյալի լոգարիթմը:
2. Ինչպե՞ս հաշվել քանորդի լոգարիթմը:
3. Ինչպե՞ս հաշվել աստիճանի լոգարիթմը:
4. Ինչպե՞ս են մի հիմքով լոգարիթմից անցնում մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի:
5. Գրեք (2) նույնությունները:

Առաջադրանքներ

Հաշվեք արտահայտության արժեքը (64-67):

64. ա) $\lg 25+\lg 4$, բ) $\log_{\frac{1}{6}} 4+\log_{\frac{1}{6}} 9$, գ) $3\log_6 3+\log_6 8$,

դ) $\log_5 75-\log_5 3$, ե) $\log_{\frac{1}{3}} 54-\log_{\frac{1}{3}} 2$, զ) $2\log_2 6-\log_2 9$:

65. ա) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10$, բ) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20$,

գ) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7 \sqrt[3]{21}$, դ) $2\log_{\frac{1}{5}} 6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 400-4\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{45}$:

66. ա) $\log_5\left(7+2\sqrt{6}\right)+\log_5\left(7-2\sqrt{6}\right)$, բ) $\log_{1,5}\left(3+\sqrt{6}\right)-\log_{1,5}\left(2+\sqrt{6}\right)$:

67. ա) $\dfrac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}$, բ) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{\lg 4+\lg 3}$,

գ) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$, դ) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$:

68. Լոգարիթմել 10 հիմքով ($a>0,\ b>0,\ c>0$):

ա) $100\sqrt{a^3b^2c}$, բ) $0{,}001a^4\sqrt{b^{-3}c^4}$, գ) $10^3a^2b^{\frac{1}{2}}c^{-3}$,

դ) $\dfrac{a^5}{0{,}1c^2\sqrt{b}}$, ե) $\dfrac{0{,}01b^3}{\sqrt[3]{b^2c^{0,5}}}$, զ) $\dfrac{0{,}1\sqrt[7]{b^3}}{c^3a^2}$:

➢**69.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$, բ) $\log_a b\cdot\log_b a=1$:

Հաշվեք արտահայտության արժեքը (70-72):

70. ա) $\log_2 7\cdot\log_7 0{,}25$, բ) $\log_5 11\cdot\log_{11} 0{,}04$,

գ) $\log_3 4\cdot\log_{16} 9$, դ) $\log_{27} 125\cdot\log_{\sqrt{5}} 3$,

ե) $\log_7 9\cdot\log_{\sqrt{3}} \sqrt{7}$, զ) $\log_{25} 81\cdot\log_{\sqrt{3}} 125$:

71. ա) $10^{1-2\lg 5}$, բ) $3^{\log_3 6-2}$, գ) $25^{1+\log_5 2}$, դ) $2^{\log_8 27+3}$:

➢**72.** ա) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$, բ) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$,

գ) $\left(5^{\log_{25} 9}+3^{\log_9 25}\right)^{\log_2 5}$, դ) $\left(25^{\log_{0,2} 6}+4^{\log_{0,5} 6}\right)^{\frac{1}{\lg 18}}$:

➢**73.** Գտեք $\log_a b$ -ն, եթե՝

ա) $\log_a a^3b^2=7$, բ) $\log_{\sqrt{a}} a^2\sqrt{b}=9$, գ) $\log_b a^4b^6=10$,

դ) $\log_a \dfrac{a^5}{b^4}=6$, ե) $\log_{\sqrt{a}} \dfrac{b\sqrt{b}}{a^4}=1$, զ) $\log_b \dfrac{b^{10}}{a^5}=5$:

74. Ո՞ր x-երի համար է հավասարությունը ճշմարիտ ($a>0,\ a\neq 1$).

ա) $\log_a x^2 = 2\log_a x$, բ) $\log_a x^2 = 2\log_a(-x)$,

գ) $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$, դ) $\log_a x^3 = 3\log_a x$:

75. Դիցուք (b_n)-ը q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա է ($b_n>0$), և

$$a_n = \lg b_n, \quad n = 1,2,\ldots :$$

ա) Գտեք $a_2 - a_1$, $a_9 - a_8$, $a_{42} - a_{41}$ տարբերությունները:

բ) Գտեք $a_{n+1} - a_n$ տարբերությունը, որտեղ $n = 1,2,\ldots$:

գ) Ապացուցեք, որ (a_n) հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է: Գտեք այդ պրոգրեսիայի տարբերությունը:

Կրկնության համար

76. Գտեք նշված արտահայտության արժեքը, որտեղ x_1-ը և x_2-ը տրված հավասարման արմատներն են.

ա) $2x^2 - 7x + 2 = 0,\quad 4x_1^2 + 4x_2^2$, բ) $3x^2 - 6x - 2 = 0,\quad x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 \cdot x_2^2$,

գ) $x^2 - 4x - 3 = 0,\quad \dfrac{3x_1}{x_2} + \dfrac{3x_2}{x_1}$:

§3. Լոգարիթմական ֆունկցիա

Լոգարիթմական ֆունկցիա կոչվում է

$$\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք լոգարիթմական ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական կիսաառանցքն է՝*** $D(f) = (0,\infty)$:

2) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է՝*** $E(f) = (-\infty,\infty)$:

Իրոք, կամայական y արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x = a^y$ կետում, քանի որ $\log_a a^y = y$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և չորրորդ քառորդներում է:

3) ***Ֆունկցիան մոնոտոն է իր որոշման տիրույթում: Ընդ որում, այն աճող է, եթե*** $a>1$ ***և նվազող՝ եթե*** $0<a<1$:

Ապացուցենք, որ $a>1$ դեպքում կամայական x_1 և x_2 դրական թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 : \qquad (1)$$

Ենթադրենք հակառակը՝ $x_1 < x_2$, բայց

$$\log_a x_1 \geq \log_a x_2 : \tag{2}$$

Հաշվի առնելով, որ $y = a^x$ ֆունկցիան $a > 1$ դեպքում աճող է, կստանանք

$$a^{\log_a x_1} \geq a^{\log_a x_2}$$

անհավասարությունը, որտեղից, հիմնական լոգարիթմական նույնության համաձայն, հետևում է, որ

$$x_1 \geq x_2 :$$

Սա հակասում է $x_1 < x_2$ պայմանին, հետևաբար՝ (2)-ը սխալ է, այսինքն՝ ճիշտ է (1)-ը:

Նման ձևով, օգտվելով մեկից փոքր հիմքով ցուցչային ֆունկցիայի նվազող լինելուց, կապացուցենք, որ $0 < a < 1$ դեպքում լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է:

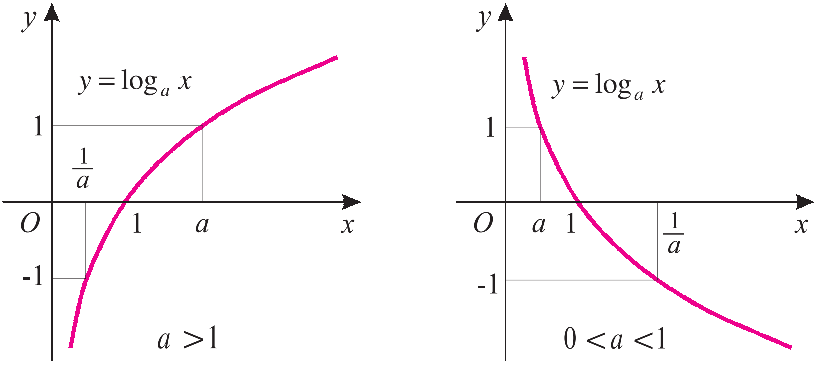
4) *Ֆունկցիան* $\mathbf{0}$ *արժեքն ընդունում է* $\mathbf{x = 1}$ *կետում:*

Այստեղից և ֆունկցիայի մոնոտոնությունից հետևում է.

5) ա) $\mathbf{a > 1}$ *դեպքում ֆունկցիան բացասական է* $\mathbf{(0,1)}$ *և դրական* $\mathbf{(1,\infty)}$ *միջակայքերում,*

բ) $\mathbf{0 < a < 1}$ *դեպքում ֆունկցիան դրական է* $\mathbf{(0,1)}$ *և բացասական* $\mathbf{(1,\infty)}$ *միջակայքերում:*

Լոգարիթմական ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը պատկերված է 6-րդ նկարում:



ա Նկ. 6 *բ*

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x) = \log_5(x^2 - 5x + 4)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Քանի որ լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական թվերի բազմությունն է, ուստի $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

անհավասարմանը բավարարող x-երի բազմությունը: Լուծելով այս անհավասարումը, ստանում ենք՝ $D(f) = (-\infty,1) \bigcup (4,\infty)$:

Օրինակ 2: Բաղդատենք $4\log_{0,7}3$ և $3\log_{0,7}4$ թվերը:

Լոգարիթմի III հիմնական հատկությունից հետևում է, որ

$$4\log_{0,7}3=\log_{0,7}3^4=\log_{0,7}81,\quad 3\log_{0,7}4=\log_{0,7}4^3=\log_{0,7}64:$$

Քանի որ $0,7<1$, ուրեմն՝ $y=\log_{0,7}x$ լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է: Հաշվի առնելով, որ $81>64$, ստանում ենք՝

$$\log_{0,7}81<\log_{0,7}64,$$

այսինքն՝

$$4\log_{0,7}3<3\log_{0,7}4:$$

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=\log_3(\sqrt{x}+3)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[0,\infty)$ միջակայքն է, որին պատկանող կամայական x-ի համար՝ $\sqrt{x}+3\geq 3$: Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է մեկից, ուրեմն՝

$$f(x)=\log_3(\sqrt{x}+3)\geq\log_3 3=1:$$

Հետևաբար՝ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 1 է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x=0$ կետում: Արժեքների բազմությունը կլինի $[1,\infty)$ միջակայքը, քանի որ լոգարիթմատակ արտահայտությունը կարող է լինել 3-ից մեծ կամայական թիվ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում լոգարիթմական ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
4. Ո՞ր քառորդներում է լոգարիթմական ֆունկցիայի գրաֆիկը:
5. Ե՞րբ է լոգարիթմական ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:
6. Որո՞նք են լոգարիթմական ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
7. Կառուցել $y=\log_2 x$ և $y=\log_{0,5}x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Առաջադրանքներ

77. Գտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\log_3(5x-6)$, բ) $y=\log_{0,5}(4-2x)$, գ) $y=\log_3(x^2-7)$,

դ) $y=\lg(x^2-2x+1)$, ե) $y=\log_{\frac{4}{7}}\dfrac{2x+5}{1-x}$, զ) $y=\log_9\dfrac{x-3}{2-4x}$:

78. Բաղդատեք թվերը.

ա) $\log_3 7$ և $\log_3 5$, բ) $\lg 0,7$ և $\lg 0,71$, գ) $\log_{\frac{1}{3}}6$ և $\log_{\frac{1}{3}}4$,

դ) $\log_{0,4}\sqrt{3}$ և 0, ե) $\log_4\sqrt[3]{3}$ և 0, զ) $\log_{\sqrt{3}}2$ և 1:

79. Պարզեք ֆունկցիայի աճող կամ նվազող լինելը.

ա) $f(x)=\log_{3,2} x$, բ) $f(x)=\log_{0,01} x$, գ) $f(x)=\lg x$:

80. Պարզեք, թե a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում է ֆունկցիան աճող և որոնց դեպքում՝ նվազող:

ա) $f(x)=\log_a x$, բ) $f(x)=\log_{a-1} x$, գ) $f(x)=\log_{2-a} x$:

81. Որոշեք արտահայտության նշանը:

ա) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$, բ) $\lg\left(\sqrt{17}-4\right)$, գ) $\log_{0,9} 0{,}99$, դ) $\log_{0,1} 1{,}01$:

➢**82.** Գտեք ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:

ա) $y=\log_2(x-2)$, բ) $y=\log_{0,4}(2x-3)$, գ) $y=\lg(x^2-3)$:

83. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը:

ա) $y=\log_2(x-4)$, բ) $y=\log_{0,5}(x+3)$, գ) $y=\log_3 x+2$:

➢**84.** Գտեք ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը:

ա) $y=\log_2\left(\sqrt{x}+4\right)$, բ) $y=\log_{0,7}\left(1-x^2\right)$, գ) $y=\lg\left(|x|+0{,}1\right)$:

➢**85.** Գտեք ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն արժեքը:

ա) $y=\log_{0,2}\left(\sqrt{x}+5\right)$, բ) $y=\log_6\left(6-x^2\right)$, գ) $y=\lg\left(10-|x|\right)$:

➢**86.** Գտեք արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

ա) $\log_{x-1}(5-x)$, բ) $\log_{2-x}(3x+9)$, գ) $\log_x(x^2-2x)$,

դ) $\log_{3-x}(16-x^2)$, ե) $\log_x \dfrac{2x+8}{7-x}$, զ) $\log_{x-4} \dfrac{x-2}{5x+1}$:

Կրկնության համար

➢**87.** Ապացուցեք, որ՝

ա) $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, բ) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, գ) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$:

§4. Լոգարիթմական հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն լոգարիթմական հավասարումը***՝

$$\log_a x=b, \qquad (1)$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Ինչպես գիտենք, այն համարժեք է

$$a^b=x$$

հավասարմանը, այսինքն՝ (1) հավասարման լուծումն է՝ $x=a^b$:

Եթե (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, հավասարումը լուծվում է նման ձևով:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_3(x^2-7x+21)=2 : \qquad (2)$$

Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2-7x+21=3^2$$

քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $x_1=3$, $x_2=4$:

Պատասխան՝ 3; 4 :

Լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս հաճախ է օգտագործվում հետևյալ պնդումը.

Եթե a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է և $u>0$, $v>0$, ապա

$$\log_a u=\log_a v \qquad (3)$$

հավասարությունը համարժեք է $u=v$ հավասարությանը:

Իրոք, հիմնական լոգարիթմական նույնության համաձայն, (3)-ից հետևում է, որ $u=a^{\log_a u}=a^{\log_a v}=v$: Մյուս կողմից՝ ակնհայտ է, որ դրական թվերի դեպքում $u=v$ հավասարությունից հետևում է (3)-ը:

Օրինակ 2: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_5(x^2+3x)=\log_5(x+3) : \qquad (4)$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x^2+3x>0 \end{cases} \qquad (5)$$

համակարգին: Այդպիսի x-երի համար (4) հավասարումը համարժեք է

$$x^2+3x=x+3 \qquad (6)$$

հավասարմանը, որի արմատներն են $x=-3$ և $x=1$: Ստուգելով համոզվում ենք, որ $x=-3$ արմատը չի բավարարում (5) համակարգին, իսկ $x=1$ արմատը բավարարում է: Նկատենք, որ համաձայն (6) հավասարության, բավական է ստուգել համակարգի անհավասարումներից մեկը (ավելի պարզը):

Պատասխան՝ 1 :

Եթե լոգարիթմական հավասարման աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ (տարբերություններ) են, ապա այն բերվում է (2) կամ (4) տեսքի հավասարման՝ երկրորդ պարագրաֆում բերված I-II հատկությունների օգնությամբ:

Պետք է նշել, որ լոգարիթմի I-III հատկությունները նույնական ձևափոխություններ չեն, քանի որ նրանց աջ և ձախ մասերի թույլատրելի արժեքների բազմությունները տարբեր են: Նշանակում է՝ տրված լոգարիթմական հավասարումն այդ հատկությունների օգնությամբ պարզեցնելիս ստանում ենք հավասարում, որը տրված հավասարման հետևանքն է, բայց կարող է համարժեք չլինել նրան: Այսինքն՝ ստացված արմատների մեջ կարող են լինել այնպիսիք, որոնք չեն բավարարում սկզբնական հավասարմանը:

Հետևաբար՝ նշված հատկությունների կիրառմամբ պարզեցված հավասարման արմատները գտնելուց հետո ***անհրաժեշտ է ստուգել***, որ հավասարման արմատները պատկանեն տրված հավասարման ԹԱԲ-ին:

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը.

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնց համար $x+1>0$ և $x+3>0$: Այդպիսի x-երի համար հավասարումը համարժեք է

$$\log_2(x+1)(x+3)=3$$

հավասարմանը, որտեղից՝

$$(x+1)(x+3)=8:$$

Լուծելով այս քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x_1=-5$, $x_2=1$: Ստուգելով համոզվում ենք, որ առաջին արմատը չի պատկանում սկզբնական հավասարման ԹԱԲ-ին, իսկ երկրորդը պատկանում է:

Պատասխան՝ 1:

Օրինակ 4: Լուծել հավասարումը.

$$\log_3^2 x^2+8\log_3 x-12=0:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն դրական x-երի բազմությունն է, որոնց համար $\log_3 x^2=2\log_3 x$: Ուստի տրված հավասարումը համարժեք է

$$4\log_3^2 x+8\log_3 x-12=0$$

հավասարմանը, որը 4-ով կրճատելուց հետո $t=\log_3 x$ նշանակումով բերվում է հետևյալ քառակուսային հավասարմանը՝

$$t^2+2t-3=0:$$

Վերջինիս արմատներն են՝ $t_1=-3$, $t_2=1$: Լուծելով $\log_3 x=-3$ և $\log_3 x=1$ հավասարումները՝ ստանում ենք՝ $x_1=3^{-3}=\dfrac{1}{27}$, $x_2=3$:

Պատասխան՝ $3;\ \dfrac{1}{27}$:

Օրինակ 5: Լուծել հավասարումը.

$$x^{\lg x+5}=10^{15+3\lg x}:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ը $(0,\infty)$ միջակայքն է, որտեղ հավասարման աջ և ձախ մասերը դրական են: Հետևաբար՝ լոգարիթմելով հավասարման աջ և ձախ մասերը 10 հիմքով, կստանանք տրվածին համարժեք հետևյալ հավասարումը՝

$$(\lg x+5)\lg x=15+3\lg x:$$

Նշանակելով $t=\lg x$ և լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $\lg x=-5$ կամ $\lg x=3$, որտեղից՝ $x=10^{-5}$ կամ $x=1000$:

Պատասխան՝ 10^{-5}; 1000:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն լոգարիթմական հավասարման լուծումը:
2. Ինչպե՞ս են լուծում լոգարիթմական հավասարումները, որոնց աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ են:
3. Ե՞րբ կարող են ստացվել կողմնակի արմատներ լոգարիթմական հավասարումը լուծելիս:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (88-100):

88. ա) $\log_7(3x-29)=2$, բ) $\lg(2x-7)=-1$,

գ) $\log_{0,7}(8x-23)=0$, դ) $\log_{0,2}(5x+10)=-2$:

89. ա) $\log_3(x^2-2x+19)=3$, բ) $\log_2(7x^2+8x+2)=0$,

գ) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+7x+3)=-4$, դ) $\log_{\frac{1}{4}}(3x^2+4x-4)+2=0$:

90. ա) $\log_3(x-1)=\log_3 5+\log_3 2$, բ) $\lg(2x-5)=2\lg 3+1$,

գ) $\log_5(x+4)=3\log_5 2+\log_5 3$, դ) $\log_{\frac{1}{5}}(5x-7)+1=2\log_{\frac{1}{5}} 6$:

91. ա) $\log_4(5x+3)=\log_4(7x+5)$, բ) $\log_7(6x-1)=\log_7(4x+9)$,

գ) $\log_{\sqrt{10}}(x+1)=\lg(3x^2+9x+1)$, դ) $\lg(x^2+2x-7)^2=2\lg(x-1)$:

92. ա) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$, բ) $\log_9(x+1)+\log_9(x-1)=0$,

գ) $2\log_2(x-5)+\log_{\sqrt{2}}(x+2)=6$, դ) $3\lg(x-\sqrt{3})+\lg(x+\sqrt{3})^3=0$:

➢**93.** ա) $\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_{\frac{1}{9}}(x+8)=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)-2$,

բ) $\log_2(x-3)+\log_8 x^3+\log_{0,5}(2x-5)=1$,

գ) $2\log_{25}(2x+5)-\log_{0,2}(x-1)=\log_{\sqrt{5}}(4x-5)$:

➢**94.** ա) $\dfrac{1}{\lg 10x}+\dfrac{6}{\lg x+5}=1$, բ) $\dfrac{1}{5-\lg(x-1)}+\dfrac{2}{\lg 10(x-1)}=1$,

գ) $\dfrac{1}{\log_2 16x}+\dfrac{1}{1-\log_4 x}=1$, դ) $\dfrac{5}{\lg 100x}-\dfrac{1}{\log_{0,1} x+6}=1$:

95. ա) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$, բ) $\lg^2(x-1)-2\lg(x-1)+1=0$,

գ) $3\log_6^2 x-4\log_6 36x+1=0$, դ) $4\log_4^2 x-2\log_2 x+1=0$:

➢**96.** ա) $\lg(10x^2)\cdot\lg(100x)=9$, բ) $\lg^2(10x^2)+\lg^2(0{,}1x)=9$,

գ) $\log_3(3x^2)\cdot\log_3\dfrac{x^3}{9}=20$, դ) $\log_2(2x)\cdot\log_2\dfrac{x}{4}=4$:

➢**97.** ա) $\log_{16}(4x+5)\cdot\log_x 4=1$, բ) $\log_9(3x+4)\cdot\log_x 3=1$,

գ) $\log_x 81x^2\cdot\log_9\sqrt{x}=3$, դ) $\log_{\sqrt{x}}\dfrac{x^3}{32}\cdot\log_{16}x=2$:

98. ա) $3^{4x+2}=5$, բ) $10^{2x+3}=2$, գ) $4^{5x-1}=6$, դ) $2^{10x-5}=7$:

➢**99.** ա) $x^{\log_3 x-3}=81$, բ) $x^{\lg x-1}=100$, գ) $x^{\log_5 x}=125x^2$, դ) $(9x)^{\log_3 x-2}=x^3$:

➢**100.** ա) $\lg(3^{x+1}-2)+\lg(3^{x+1}+2)=\lg 5$,

բ) $(1-x)\log_3 2+\log_3(4^x+2)=2$:

101. Լուծել հավասարումների համակարգը:

ա) $\begin{cases}x+y=34\\ \log_2 x+\log_2 y=6;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}xy=2\\ 2\log_2 x-\log_2 y=8;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}\log_4(x+y)=2\\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}\log_{0,2}(x+y)+2=0\\ \log_{0,2}(x-y)+1=0:\end{cases}$

Կրկնության համար

➢**102.** Ապացուցել, որ երկնիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թվի գումարը բաժանվում է 11-ի:

➢**103.** Ապացուցել, որ բնական թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել՝

ա) 2 մնացորդ, բ) 3 մնացորդ:

§5. Լոգարիթմական անհավասարումներ

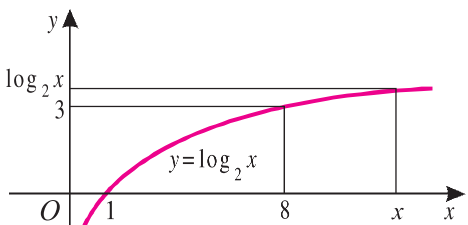
Դիտարկենք *պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները*՝

$$\log_a x>b \quad \text{և} \quad \log_a x<b, \qquad (1)$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Սկզբում դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1: Լուծենք $\log_2 x>3$ անհավասարումը:

Գիտենք, որ $f(x)=\log_2 x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում: Այն աճող է և ընդունում է 3 արժեքը $x=2^3=8$ կետում՝ $\log_2 8=3$ (նկ. 7):



Նկ. 7

Հետևաբար՝

$$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 8 \Leftrightarrow x > 8:$$

Պատասխան՝ $(8;\infty)$:

Այժմ քննարկենք ընդհանուր դեպքը: Հիշենք, որ $f(x)=\log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում, ընդ որում, այն աճող է, եթե $a>1$ և նվազող է, եթե $0<a<1$: Դա նշանակում է, որ՝

եթե $\boldsymbol{a>1}$***, ապա***

$$\boldsymbol{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0},$$

եթե $\boldsymbol{0<a<1}$***, ապա***

$$\boldsymbol{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v}:$$

Այսպիսով՝ միևնույն հիմքով լոգարիթմների անհավասարությունից նրանց արգումենտների անհավասարությանն անցնելիս՝

ա) ***1-ից մեծ հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը չի փոխվում,***

բ) ***1-ից փոքր հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը շրջվում է:***

Եվ հակառակը. դրական անդամներով անհավասարման երկու մասերը կարելի է լոգարիթմել միևնույն հիմքով, ընդ որում, անհավասարության նշանը չի փոխվում, եթե հիմքը մեծ է մեկից և շրջվում է, եթե հիմքը փոքր է մեկից:

Վերադառնալով (1) անհավասարումներին՝ նկատենք, որ դրանք կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\log_a x > \log_a a^b \quad \text{և} \quad \log_a x < \log_a a^b:$$

Այժմ, հաշվի առնելով, որ $a^b>0$, եզրակացնում ենք, որ կամայական b թվի համար,

եթե $\boldsymbol{a>1}$***, ապա՝***

$$\boldsymbol{\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b},$$

$$\boldsymbol{\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b}$$

եթե $\boldsymbol{0<a<1}$***, ապա՝***

$$\boldsymbol{\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b}$$

$$\boldsymbol{\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b}$$

Հանգունորեն են լուծվում նաև պարզագույն լոգարիթմական ոչ խիստ անհավասարումները:

Օրինակ 2: $\log_{0,5} x \geq 2$ անհավասարման լուծումն է՝ $0<x\leq 0,25$, իսկ $\log_{0,5} x \leq 2$ անհավասարմանը՝ $x \geq 0,25$:

Այն դեպքերում, երբ (1) անհավասարումներում x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, լուծումը գտնում են նման ձևով:

Օրինակ 3: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) \geq -2:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումն է՝ $-1{,}5 < x \leq 11$:

Պատասխան՝ $(-1{,}5;11]$:

Նշենք, որ լոգարիթմների օգնությամբ կարելի է լուծել $a^x > b$ կամ $a^x < b$ տեսքի կամայական պարզագույն ցուցչային անհավասարում, որը լուծել ենք միայն այն դեպքերում, երբ b-ն կարողացել ենք ներկայացնել որպես a-ի աստիճան:

Օրինակ 4: Լուծենք $2^x < 5$ անհավասարումը:

Քանի որ $2>1$, կարող ենք անհավասարման երկու մասերը լոգարիթմել 2 հիմքով, պահպանելով անհավասարության նշանը՝ $\log_2 2^x < \log_2 5$, որտեղից՝ $x < \log_2 5$:

Պատասխան՝ $(-\infty;\log_2 5)$:

Օրինակ 5: Լուծենք անհավասարումը.

$$\lg(x+27) - \lg(16-2x) > \lg x:$$

Նախ, լուծելով

$$\begin{cases} x+27>0 \\ 16-2x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

համակարգը, գտնենք անհավասարման ԹԱԲ-ը՝ $x \in (0;8)$: Այնուհետև անհավասարումը գրենք հետևյալ կերպ՝

$$\lg(x+27) > \lg(16-2x) + \lg x,$$

որտեղից կստանանք՝

$$\lg(x+27) > \lg(16-2x)x:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է 1-ից, ուրեմն՝

$$x+27 > (16-2x)x:$$

Այս քառակուսային անհավասարման լուծումն է՝ $x \in (-\infty;3) \cup (4{,}5;\infty)$, որը հատելով ԹԱԲ-ի հետ, ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;3) \cup (4{,}5;8)$:

Օրինակ 6: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log^2_{0,5} x + 3\log_{0,5} x - 10 \geq 0:$$

Անհավասարումը $\log_{0,5} x = t$ նշանակումով բերվում է $t^2 + 3t - 10 \geq 0$ քառակուսային անհավասարման, որի լուծումը

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -5 \\ t \geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբն է: Վերադառնալով նշանակմանը՝ ստանում ենք

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x \leq -5 \\ \log_{0,5} x \geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբը: Հաշվի առնելով, որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, պարզում ենք, որ ստացված պարզագույն լոգարիթմական հավասարումներից առաջինի լուծումն է՝ $x \geq 32$, իսկ երկրորդինը՝ $0 < x \leq 0,25$: Միավորելով այս լուծումները՝ ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;0,25] \cup [32;\infty)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $\log_a x \geq b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a > 1$, բ) $0 < a < 1$:
3. Ո՞րն է $\log_a x < b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a > 1$, բ) $0 < a < 1$:
4. Ո՞րն է $a^x > b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a > 1$, բ) $0 < a < 1$:

Առաջադրանքներ

Լուծեք անհավասարումը (104-111):

104. ա) $\log_2(x-5) \geq 3$, բ) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) > 2$, գ) $\log_5(x-5) \leq -2$,

դ) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq -5$, ե) $\log_7(6-x) < 1$, զ) $\log_{\frac{1}{5}}(x-8) > 1$,

է) $\log_9(3x-6) > 0$, ը) $\log_{\frac{7}{8}}(4x+8) \leq 0$, թ) $\lg(12x-18) \leq 0$:

105. ա) $\log_3(x^2+7x-5) < 1$, բ) $\log_{0,1}(x^2+2x+2) \leq -1$,

գ) $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{x+4}{x+5} > -3$, դ) $\log_2\dfrac{3x-1}{x+2} < 0$:

106. ա) $\lg(11-3x) < 2 - \lg 5$, բ) $\lg(7x+5) < 1 + \lg 3$,

գ) $\log_2(4x-x^2) < 5 + 2\log_{0,5} 3$, դ) $\log_2(x^2-3x-4) \leq 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$:

107. ա) $\log_4(x+3) \leq \log_4(9x-13)$, բ) $\log_{\frac{3}{5}}(2x+7) > \log_{\frac{3}{5}}(7x-18)$, գ) $\log_{\sqrt{10}}(2x+1) > \lg(8x+9)$, դ) $2\log_{0,3}(2x-7) \le \log_{0,3}(3x-6)$:

108. ա) $\log_2 x + \log_2(x-3) > 2$, բ) $\log_{\sqrt{6}}(x-4) + 2\log_6(x+1) \le 2$,

գ) $\lg x + \lg(13-2x) < 1 + \lg 2$, դ) $\log_{1/\sqrt{7}}\sqrt{x+7} + \log_{1/7}(x+1) \le -1$:

➢**109.** ա) $4\log_2^2 x + \log_2 x > 5$, բ) $\log_{1/6}^2 x + 3\log_{1/6}\dfrac{x}{6} \le 1$,

գ) $1 - \dfrac{1}{5-\lg x} < \dfrac{2}{\lg x + 1}$, դ) $\log_{0,5} x + 4 \ge \dfrac{\log_{0,5}^2 x}{4 - \log_{0,5} x}$:

➢**110.** ա) $(2x)^{\log_2 x} > 64$, բ) $x^{\log_3(9x)} \le 27$, գ) $x^{\lg 10x} < 100x^2$:

➢**111.** ա) $\log_{3x-5} 7 < 0$, բ) $\log_{2x-7} 0,8 > 0$:

Կրկնության համար

112. Արտահայտեք սովորական կոտորակով:

ա) $0,(3)$, բ) $0,(12)$, գ) $4,(2)$, դ) $1,3(6)$, ե) $2,5(10)$:

➢**113.** Գտնել անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը, եթե նրա անդամների գումարը 4 է, իսկ անդամների խորանարդների գումարը՝ 192:

Գլուխ 3

Տրամաբանության տարրերը: Թվային հաջորդականություն, սահման

§1. Ասույթներ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և ժխտումը

Դիտարկենք հետևյալ նախադասությունները:

(A) Երևանը Հայաստանի Հանրապետության մայրաքաղաքն է:

(B) Ամենաարագաշարժ կենդանին կրիան է:

(C) $3+2=5$: (D) $4+6<7$:

(E) $3\cdot 2>5$: (F) $\sin\frac{\pi}{7}=0$:

Այս նախադասություններից յուրաքանչյուրը ճիշտ կամ սխալ դատողություն է: Նման նախադասություններն անվանում են ***ասույթ*** (պնդում): Ասույթը կարող է լինել ճշմարիտ կամ կեղծ: Գտնել ասույթի ***ճշմարտային արժեքը***, նշանակում է պարզել ասույթի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը: Այսինքն՝ ասույթը կարող է ունենալ երկու ճշմարտային արժեք՝ «ճշմարիտ» կամ «կեղծ»: Բերված ասույթների ճշմարտային արժեքները գտնելը հեշտ է՝ A, C, E ասույթները ճշմարիտ են, իսկ B, D, F ասույթները՝ կեղծ:

«1-ը փոքր թիվ է» նախադասությունն ասույթ չէ, քանի որ հնարավոր չէ պարզել այն ճշմարիտ է, թե՝ կեղծ: Իհարկե, 10-ի համեմատությամբ 1-ը փոքր թիվ է, բայց 0,1-ի համեմատությամբ էլ մեծ է:

Դիտարկենք հետևյալ դատողությունները:

$G(x)$ x թիվը բաժանվում է 5-ի:

$H(x)$ x թիվը դրական է:

$I(x)$ $x^2+2x>9$:

Եթե $x=10$, ապա երեք ասույթներն էլ ճշմարիտ են, իսկ եթե $x=1$, ապա $H(x)$ ասույթը ճշմարիտ է, իսկ $G(x)$ և $I(x)$ ասույթները՝ կեղծ: Սրանք ***փոփոխական պարունակող ասույթներ*** են (ասույթային ձևեր), որոնք x փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում կարող են լինել ճշմարիտ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում՝ կեղծ: Օրինակ՝ $G(15)$, $H(\sqrt{3})$, $I(3,1)$ ասույթները ճշմարիտ են, իսկ $G(9)$, $H(0)$, $I(1,3)$ ասույթները՝ կեղծ:

$\log_2 x = 3$ հավասարումը (ինչպես և կամայական այլ հավասարում) փոփոխական պարունակող ասույթ է: Երբ $x = 8$, այն ճշմարիտ ասույթ է, իսկ x-ի մնացած արժեքների դեպքում դառնում է կեղծ ասույթ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ասույթները:

(J) Գոյություն ունի x բնական թիվ, որը բաժանվում է 5-ի:

(K) Կամայական x բնական թիվ բաժանվում է 5-ի:

Առաջին հայացքից սրանք նույնպես փոփոխական պարունակող ասույթներ են: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ իրականում դրանք կախված չեն x-ից:

J ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերի մեջ կա գոնե մեկը, որը բաժանվում է 5-ի, և եթե այդպիսին կա, ապա J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ եթե չկա, ապա կեղծ է:

K ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերը բաժանվում են 5-ի, և եթե կա գոնե մեկ բնական թիվ որը չի բաժանվում 5-ի, ապա K ասույթը կեղծ է: Իհարկե պարզ է, որ J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ K ասույթը՝ կեղծ:

Դիտարկենք հետևյալ ասույթները:

Ա. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս:

Բ. Ես կգնամ տուն:

Գ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն:

Դ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս և կգնամ տուն:

Ե. Ես չեմ հանդիպի ընկերոջս:

Զ. Ես չեմ գնա տուն:

Գ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է Ա և Բ ասույթներից գոնե մեկը և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են: Այս դեպքում ասում են, որ Գ ասույթը Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական գումարն*** է, և գրում են՝

Գ = Ա $\vee$ Բ (կարդացվում է՝ Ա կամ Բ):

Նկատենք, որ առօրյա խոսակցություններում «կամ» շաղկապն օգտագործելիս, օրինակ՝ «ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն» ասելիս ավելի հաճախ հասկանում ենք երկուսից մեկը. կամ կհանդիպեմ ընկերոջս, կամ կգնամ տուն և ոչ երկուսը միասին: Մաթեմատիկայում «Ա կամ Բ» ասույթը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ Ա և Բ ասույթները երկուսն էլ ճշմարիտ են:

Դ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ Ա-ն, և՛ Բ-ն և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է: Դ ասույթը Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական արտադրյալն*** է՝

Դ = Ա $\wedge$ Բ (կարդացվում է՝ Ա և Բ):

Ե ասույթն Ա ասույթի ***ժխտումն*** է: Այն ճշմարիտ է, եթե կեղծ է Ա-ն և կեղծ է, եթե Ա-ն ճշմարիտ է: Ա ասույթի ժխտումը գրվում է այսպես՝ $\neg$Ա կամ պարզապես՝ «ոչ Ա»:

Հանգունորեն, Զ ասույթը Բ-ի ժխտումն է՝ Զ = $\neg$Բ: Պարզ է, որ Զ ասույթի ժխտումն էլ Բ-ն է՝ Բ = $\neg$Զ, այսինքն՝ Բ = $\neg(\neg$Բ):

Դժվար չի տեսնել, որ «ոչ Գ» ասույթը ճշմարիտ է (այսինքն՝ Գ-ն կեղծ է) միայն այն դեպքում, երբ ճշմարիտ են «ոչ Ա» և «ոչ Բ» ասույթները (այսինքն՝ Ա-ն և Բ-ն կեղծ են): Նշանակում է՝ «Ա կամ Բ» տրամաբանական գումարի ժխտումը «ոչ Ա և ոչ Բ» տրամաբանական արտադրյալն է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ «Ա և Բ» տրամաբանական ասույթի ժխտումը «ոչ Ա կամ ոչ Բ» տրամաբանական գումարն է:

A և B ասույթների տրամաբանական գումարը՝ $A \vee B$ (A կամ B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է A և B ասույթներից գոնե մեկը, և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են:

A և B ասույթների տրամաբանական արտադրյալը՝ $A \wedge B$ (A և B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ A-ն, և՛ B-ն, և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է:

A և $\neg A$ (ոչ A) ասույթներից մեկը ճշմարիտ է, մյուսը՝ կեղծ (երրորդի բացառման օրենք)***:***

Ասվածից հետևում են հետևյալ տրամաբանական կանոնները, որոնք անվանում են ***Դե Մորգանի օրենքներ***:

«A կամ B» ասույթի ժխտումը «(ոչ A) և (ոչ B)» ասույթն է:

«A և B» ասույթի ժխտումը «(ոչ A) կամ (ոչ B)» ասույթն է:

Այս օրենքներին դուք ծանոթ եք 8-րդ դասարանի դասընթացից: Հիշեք՝ «բանաձևերի համախմբի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համակարգին» և «բանաձևերի համակարգի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համախմբին»:

Ստորև բերված է տրամաբանական գործողությունների ճշմարտային արժեքների աղյուսակը («Ճ» նշանակում է՝ «ճշմարիտ», իսկ «Կ» նշանակում է՝ «կեղծ»).

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
Ճ	Ճ	Ճ	Ճ	Կ	Կ	Կ	Կ
Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ	Կ	Ճ
Կ	Ճ	Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ
Կ	Կ	Կ	Կ	Ճ	Ճ	Ճ	Ճ

Օրինակ 2: Դիտարկենք ասույթների և դրանց ժխտումների օրինակներ:

ա. Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը Մադրիդն է կամ Լոնդոնը:

$\neg$ ***ա.*** Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը ո՛չ Մադրիդն է, և ոչ էլ՝ Լոնդոնը:

բ. Գնորդը տանն է և քնած չէ:

$\neg$ ***բ.*** Գնորդը տանը չէ կամ քնած է:

գ. Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված են:

$\neg$ **գ.** Դպրոցում կա դասասենյակ, որը վերանորոգված չէ:

դ. Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ է սովորում:

$\neg$ **դ.** Յուրաքանչյուր դասարանում կա աշակերտ, որը լավ չի սովորում:

ե. Կամայական x ունի $A(x)$ հատկությունը:

$\neg$ **ե.** Գոյություն ունի x, որը չունի $A(x)$ հատկությունը:

զ. Գոյություն ունի x, որն օժտված է $A(x)$ հատկությամբ:

$\neg$ **զ.** Կամայական x օժտված չէ $A(x)$ հատկությամբ:

Նշենք, որ գ ասույթի ժխտումը չի կարելի ձևակերպել այսպես.

է. «Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված չեն»:

Իրոք, եթե դպրոցում լինի և՛ վերանորոգված, և՛ չվերանորոգված դասարան, ապա կեղծ կլինեն և՛ **գ**, և՛ **է** ասույթները, մինչդեռ ասույթը և իր ժխտումը միաժամանակ կեղծ լինել չեն կարող:

Հանգունորեն սխալ է դ ասույթի ժխտման այսպիսի ձևակերպումը.

ը. «Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ չի սովորում», քանի որ և՛ **դ**, և՛ **ը** ասույթները կեղծ են, եթե դասարանում կա և՛ լավ սովորող աշակերտ, և՛ աշակերտ, որը լավ չի սովորում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Բերեք ասույթների օրինակներ և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները:
2. Բերեք փոփոխական պարունակող ասույթների օրինակներ:
3. Բերեք ասույթների օրինակներ և կազմեք դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը:
4. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական գումարը և ե՞րբ՝ կեղծ:
5. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական արտադրյալը և ե՞րբ՝ կեղծ:
6. Ձևակերպեք Դե Մորգանի օրենքները:
7. Կազմեք «կամայական» և «գոյություն ունի» արտահայտություններով ասույթներ և գրեք դրանց ժխտումները:

Առաջադրանքներ

Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը (114-116):

114. ա) 347-ը զույգ թիվ է: բ) $\sqrt{2}$ թիվը ռացիոնալ է:

գ) 29-ը բաժանվում է 2-ի: դ) $2\sqrt{3} > \sqrt{12}$:

115. ա) $y = \sin x$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

բ) $y = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

գ) $y=\cos x$ ֆունկցիան զույգ է:

դ) $y=x+1$ ֆունկցիան կենտ է:

116. ա) Յուրաքանչյուր զուգահեռագիծ շեղանկյուն է:

բ) Կամայական շեղանկյուն քառակուսի է:

գ) Գոյություն ունի ուղղանկյուն, որը քառակուսի է:

դ) Գոյություն ունի շեղանկյուն, որը քառակուսի չէ:

ե) Կամայական շեղանկյուն զուգահեռագիծ է:

117. Պարզեք, թե հետևյալ նախադասություններից որոնք են ասույթ և գտեք դրանց ճշմարտային արժեքը:

ա) Տուն կառուցելու համար մեկ օրը կարճ ժամկետ է:

բ) Մեկ օրը կարճ ժամկետ է:

գ) $y=x^5$ ֆունկցիան աճող է:

դ) $y=x^5$ ֆունկցիան արագ է աճում:

118. Ձևակերպեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները:

ա) $5>2,\ 5=2$, բ) $3>3,\ 3=3$, գ) $7<9,\ 7=9$, բ) $8<8,\ 8=8$:

119. Դիցուք A-ն որևէ ասույթ է: Գտեք հետևյալ ասույթների ճշմարտային արժեքները.

ա) $A\vee(\neg A)$, բ) $A\wedge(\neg A)$:

120. Փոփոխական պարունակող ասույթը գրեք առանց $\vee$, $\wedge$ և $\neg$ նշանների:

ա) $(x>1)\vee(x=1)$, բ) $(x<5)\vee(x=5)$, գ) $(x<-7)\vee(x>7)$,

դ) $(x>-4)\wedge(x<4)$, ե) $\neg(x>19)$, զ) $\neg(x<21)$:

121. Կազմեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և ձևակերպեք դրանց ժխտումները:

ա) Սոնան գնաց թատրոն: Արամը գնաց թատրոն:

բ) Սոնան գերազանցիկ է: Արամը գերազանցիկ է:

գ) Արկղում կա սպիտակ գնդիկ: Արկղում չկա սև գնդիկ:

դ) Լիլիթը դպրոցական է: Լիլիթը շախմատ չի խաղում:

➤ **122.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ ձևակերպեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) ABC եռանկյունը հավասարակողմ չէ,

բ) ABC եռանկյունը հավասարասրուն չէ,

գ) $ABCD$ քառանկյունը զուգահեռագիծ չէ,

դ) $ABCD$ քառանկյունը սեղան չէ:

➤ **123.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը:

ա) Դահլիճի բոլոր դռները փակ են:

բ) Յուրաքանչյուր բակում մեքենա է կանգնած:

գ) Որոշ ծաղիկներ չեն ծաղկում գարնանը:

դ) Գոյություն ունի ծաղիկ, որը չի ծաղկում աշնանը:

➢**124.** Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը:

ա) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 2-ի և 5-ի, պատիկ է 10-ին:

բ) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 8-ի և 14-ի, պատիկ է 112-ին:

➢**125.** Ո՞րն է «Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված են» ասույթի ժխտումը:

ա) Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված չեն:

բ) Կինոթատրոնում կա ազատ նստատեղ:

գ) Կինոթատրոնի որոշ նստատեղեր զբաղված են:

դ) Կինոթատրոնի կամայական նստատեղ ազատ է:

➢**126.** Ո՞րն է «Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա են» ասույթի ժխտումը:

ա) Բոլոր հաջորդականությունները թվաբանական պրոգրեսիա են:

բ) Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա չեն:

գ) Կամայական հաջորդականություն երկրաչափական պրոգրեսիա է:

դ) Կամայական հաջորդականություն թվաբանական պրոգրեսիա չէ:

Կրկնության համար

➢**127.** Ապացուցեք, որ կամայական α-ի համար՝

ա) $\frac{1}{2} \le \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \le 1$, բ) $\frac{1}{4} \le \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \le 1$,

գ) $1 < \dfrac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1-\sin^2\alpha - \cos^6\alpha} < 2$, $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

դ) $\frac{2}{3} < \dfrac{1-\cos^4\alpha - \sin^6\alpha}{1-\sin^6\alpha - \cos^6\alpha} < 1$, $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$:

§2. Հետևություն և համարժեքություն

Թե՛ առօրյա խոսակցություններում, թե՛ մաթեմատիկայում հաճախ ենք հանդիպում «եթե A, ապա B» տեսքի ասույթների, որոնք անվանել ենք ***հետևություն***: Ինչպես գիտենք, այստեղ A ասույթը կոչվում է ***պայման***, իսկ B-ն՝ ***հետևանք:*** Եթե պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև հետևանքը, ապա հետևությունը ճշմարիտ է: Հետևությունը կեղծ է, եթե պայմանը ճշմարիտ է, իսկ հետևությունը՝ կեղծ:

Այստեղ A-ն և B-ն կարող են լինել ինչպես պարզ ասույթներ (օրինակ՝ «եթե անձրև գա, ապա ես խաղալու չեմ գնա»), այնպես էլ փոփոխական պարունակող դատողություններ (օրինակ՝ «եթե $x>4$, ապա $\sqrt{x}>2$»):

Փոփոխական պարունակող՝ «եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» հետևությունը ճշմարիտ է, եթե կամայական x-ի համար $A(x)$ պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև $B(x)$ հետևանքը:
Հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ գոյություն ունի այնպիսի x, որ $A(x)$-ը ճշմարիտ է, իսկ $B(x)$-ը՝ կեղծ:

«Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» հետևությունը կրճատ գրում են այսպես՝

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

(երբեմն օգտագործվում է նաև $B(x) \Leftarrow A(x)$ նշանակումը):

Օրինակ 1. Տրված է $y=f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիան:

ա) «$x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) \leq 1$» հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ «գոյություն ունի այնպիսի x իրական թիվ, որ $f(x)>1$»

բ) «Կամայական x_1 և x_2 թվերի համար $x_1<x_2$ պայմանից հետևում է, որ $f(x_1)<f(x_2)$» պնդումը կեղծ է, նշանակում է՝ «գոյություն ունեն x_1 և x_2 թվեր, որ $x_1<x_2$ և $f(x_1) \geq f(x_2)$»:

Դիտարկենք հետևյալ հետևությունները:

Հետևությունը	Կառուցվածքը
Ա. Եթե $x=3$, ապա $x^2=9$:	Ա. Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$:
Բ. Եթե $x^2=9$, ապա $x=3$:	Բ. Եթե $B(x)$, ապա $A(x)$:
Գ. Եթե $x \neq 3$, ապա $x^2 \neq 9$:	Գ. Եթե ոչ $A(x)$, ապա ոչ $B(x)$:

Հեշտ է նկատել, որ Բ պնդումն ստացվել է Ա-ից՝ պայմանի և հետևանքի տեղերը փոխելով: Նման դեպքում ասում են, որ Բ-ն Ա-ի ***հակադարձ պնդումն*** է, իսկ Ա-ն անվանում են ***ուղիղ պնդում***: Պարզ է, որ Ա պնդումն էլ Բ-ի հակադարձն է, ուստի ասում են նաև, որ Ա-ն և Բ-ն ***փոխհակադարձ պնդումներ*** են:

Գ պնդումը կոչվում է Ա-ի ***հակադիր պնդում***: Ա-ն, իր հերթին, Գ-ի հակադիրն է, Ա-ն և Գ-ն ***փոխհակադիր պնդումներ*** են:

Դիտարկված օրինակում Ա հետևությունը ճշմարիտ է, իսկ Բ-ն և Գ-ն՝ կեղծ ($x=-3$ դեպքում Բ-ի և Գ-ի պայմանները ճշմարիտ են, իսկ հետևանքները՝ կեղծ):

Օրինակ 2: Կամայական a և b իրական թվերի համար.

Ա. եթե $a=b$, ապա $a^3=b^3$ (ուղիղ պնդում), Բ. եթե $a^3 = b^3$, ապա $a = b$ (հակադարձ պնդում):

Գ. եթե $a \neq b$, ապա $a^3 \neq b^3$ (հակադիր պնդում):

Այս օրինակում բոլոր պնդումները ճշմարիտ են:

Եթե $A(x) \Rightarrow B(x)$ հետևությունը ճշմարիտ է, ասում են, որը $B(x)$ -ն ***անհրաժեշտ պայման*** է $A(x)$ -ի համար, իսկ եթե ճշմարիտ է $B(x) \Rightarrow A(x)$ հետևությունը, ասում են, որ $B(x)$ -ը ***բավարար պայման*** է $A(x)$ -ի համար:

Եթե ճշմարիտ են և՛ ուղիղ՝ $A(x) \Rightarrow B(x)$, և՛ հակադարձ՝ $B(x) \Rightarrow A(x)$ պնդումները, ապա $B(x)$ -ն ***անհրաժեշտ և բավարար պայման*** է $A(x)$ -ի համար: Այս դեպքում ասում են, որ $A(x)$ -ը և $B(x)$ -ը ***համարժեք*** են, այսինքն՝ ունենք ***համարժեքություն***՝

$$A(x) \Leftrightarrow B(x) \ :$$

Այսպիսով՝ $A(x)$ -ը և $B(x)$ -ը համարժեք են, եթե x-ի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում երկուսն էլ ճշմարիտ են կամ երկուսն էլ կեղծ են:

Օրինակ 3 (հիմնավորեք ինքնուրույն):

ա) $x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3$, բ) $\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$:

գ) Որպեսզի $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները լինեն դրական, անհրաժեշտ է, որ $a > 0$:

դ) Որպեսզի $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամն ունենա արմատ, բավարար է, որ $ac < 0$:

ե) Որպեսզի $\lg(x-1) > \cos x$ անհավասարությունը ճիշտ լինի, անհրաժեշտ է, որ $x > 1$:

զ) Որպեսզի $\lg(x-1) > \cos x$ անհավասարությունը ճիշտ լինի, բավարար է, որ $x > 11$:

Օրինակ 4: «Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է» և «զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են» պայմանները համարժեք են: Այս փաստը մաթեմատիկական տեքստերում կարող է ձևակերպվել նաև հետևյալ նախադասություններով.

ա) Որպեսզի զուգահեռագիծը լինի ուղղանկյուն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի նրա անկյունագծերը լինեն հավասար:

բ) Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա անկյունագծերը հավասար են:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ասույթն է կոչվում հետևություն:
2. Ի՞նչ մասերից է կազմված հետևությունը:
3. Ե՞րբ է փոփոխական պարունակող հետևությունը ճշմարիտ և ե՞րբ՝ կեղծ:

4. Բերեք հետևության օրինակ: Ձևակերպեք դրա հակադարձը, հակադիրը:

5. Ի՞նչ է նշանակում՝ անհրաժեշտ պայման:

6. Ի՞նչ է նշանակում՝ բավարար պայման:

7. Ի՞նչ է նշանակում՝ համարժեքություն, անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Առաջադրանքներ

128. Գտեք հետևության ճշմարտային արժեքը:

ա) Եթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 4-ի, ապա այն բաժանվում է 8-ի:

բ) Եթե թիվը բաժանվում է 8-ի, ապա այն բաժանվում է 2-ի և 4-ի:

գ) Եթե քառանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա դրա անկյունագծերը հավասար են:

դ) Եթե քառանկյան անկյունագծերը հավասար են, ապա այն զուգահեռագիծ է:

Գրեք, թե ինչ է նշանակում տրված հետևության կեղծ լինելը և հիմնավորեք, որ այն կեղծ է (129-130):

129. ա) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 > 0$, բ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow |x| > 0$,

գ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$, դ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lg x^2 = 2\lg x$:

➢ **130.** ա) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի մեծագույն տարր:

բ) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն տարր:

Գրեք տրված հետևության հակադարձը, հակադիրը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները (131-132):

131. ա) Եթե $a = b$, ապա $a^2 = b^2$, բ) Եթե $a^5 = b^5$, ապա $a = b$,

գ) Եթե $a > b$, ապա $a^7 > b^7$, դ) Եթե $a > 4$, ապա $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$:

132. ա) $x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$, բ) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$,

գ) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$, դ) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$:

133. Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ, և ո՞ր զույգերն են փոխհակադարձ կամ փոխհակադիր:

ա) Եթե գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարը բաժանվում է 13-ի:

բ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարը չի բաժանվում 13-ի:

գ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը բաժանվում 13-ի, ապա գումարը բաժանվում է 13-ի:

դ) Եթե գումարը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի:

ե) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից ոչ մեկը չի բաժանվում 13-ի:

գ) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի:

Աստղանիշի փոխարեն դրեք $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ նշաններից մեկը (134-135):

134. ա) $x(x-3)=0 * \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$, բ) $x^2-4=0 * \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$,

գ) $\cos x=1 * x=0$, դ) $x=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z} * \cos^2 x=1$:

135. ա) $\lg x<1 * x<10$, բ) $\lg x>1 * x>10$,

գ) $\sqrt{x}<3 * x<9$, դ) $\sqrt{x}>3 * x>9$,

ե) $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ * «x-ը I քառորդում է», զ) «x-ը IV քառորդում է» * $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$:

136. ա) «k-ն զույգ թիվ է» $*$ «k-ի վերջին թվանշանը 2 է»:

բ) «a թիվը բաժանվում է 6-ի և 4-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 24-ի»:

գ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 20-ի»:

դ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 10-ի»:

137. Նշեք տրված պայմանի համար բավարար պայման:

ա) $a^2>b^2$, բ) $\sin x>0$, գ) $\log_a^b>0$, դ) $\sqrt{x}>x-1$:

138. Նշեք տրված պայմանի համար անհրաժեշտ պայման.

ա) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի արմատները դրական են:

բ) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները բացասական են:

139. Շարունակեք նախադասությունն այնպես, որ ստացվի ճշմարիտ պնդում:

ա) Որպեսզի եռանկյան որևէ գագաթից տարված միջնագիծն ու կիսորդը համընկնեն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

բ) Որպեսզի քառանկյանը հնարավոր լինի արտագծել շրջանագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

գ) Քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ այն և միայն այն դեպքում, երբ ...:

դ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամն ունենա երկու արմատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

Կրկնության համար

140. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 5 սմ է, դրան առընթեր անկյան կիսորդը՝ 6 սմ: Գտնել սրունքի երկարությունը:

141. Գտնել $7\sqrt{3}$ սմ շառավղով շրջանին ներգծած ABC եռանկյան BC կողմի երկարությունը, եթե $AB=9$ սմ, $AC=16$ սմ:

§3. Թվային հաջորդականություն

Տասներորդ դասարանում մենք ուսումնասիրեցինք թվային ֆունկցիաները: Հիշեցնենք, որ թվային ենք անվանել այն ֆունկցիաները, որոնց որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը թվային բազմություններ են: Այժմ կդիտարկենք այնպիսի թվային ֆունկցիաներ, որոնց որոշման տիրույթը բնական թվերի բազմությունն է՝ $\mathbf{N}$ -ը: Այդպիսի ֆունկցիան անվանում են ***անվերջ թվային հաջորդականություն***: Քանի որ դիտարկելու ենք միայն անվերջ թվային հաջորդականություններ, այսուհետև «անվերջ» բառը բաց կթողնենք, այսինքն՝ $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ ֆունկցիան կանվանենք թվային հաջորդականություն կամ, պարզապես, ***հաջորդականություն***, իսկ $a_n=f(n)$ արժեքը՝ հաջորդականության n -րդ կամ ***ընդհանուր անդամ***: Այսպիսով՝

հաջորդականությունն ամեն մի n բնական թվի համապատասխանեցնում է որևէ a_n թիվ:

Հաջորդականության անկախ փոփոխականը՝ n -ը, ընդունված է անվանել ***ինդեքս*** (***համար***): Ինչպես որ ֆունկցիայի արժեքը որոշվում է անկախ փոփոխականի արժեքով, այնպես էլ հաջորդականության ամեն մի անդամ որոշվում է իր ինդեքսով :

Հաջորդականության համար կօգտագործենք ֆունկցիաների գրառման հետևյալ ձևը՝ $a_n,\ n\in\mathbf{N}$: Հաշվի առնելով, որ հաջորդականության ինդեքսը՝ n -ը, միշտ փոփոխվում է բնական թվերի բազմությամբ, « $a_n,\ n\in\mathbf{N}$ » արտահայտության փոխարեն կօգտագործենք « a_n հաջորդականություն» բառակապակցությունը:

Քանի որ հաջորդականությունը ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է, նրա համար պահպանվում են ֆունկցիայի տրման ձևերը, մասնավորապես, հաջորդականությունը կարելի է տալ արտահայտությամբ կամ բանաձևով:

Օրինակ 1: $a_n=\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն ամեն մի բնական թվի համապատասխանեցնում է այդ թվի հակադարձը: Մասնավորապես՝ $a_1=1$, $a_5=\dfrac{1}{5}$, $a_{2000}=\dfrac{1}{2000}$ և այլն:

Օրինակ 2: $a_n=(-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով (ինդեքսով) անդամները հավասար են 1-ի, կենտ համարով անդամները՝ -1 -ի:

Իսկ $a_n=5$ հաջորդականության բոլոր անդամներն իրար հավասար են (հավասար են 5 -ի): Այդպիսի հաջորդականություններն անվանում են ***հաստատուն հաջորդականություններ***:

Հաջորդականության a_{n-1} և a_{n+1} անդամները կոչվում են a_n անդամի, համապատասխանաբար ***նախորդ և հաջորդ անդամներ***: Հաջորդականության տրման ձևերից է անդրադարձ եղանակը, երբ հաջորդականության ամեն մի անդամը ներկայացվում է նախորդ անդամի կամ անդամների միջոցով: Դուք այդպիսի հաջորդականությունների ծանոթ եք: Դրանցից են թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները, որոնք սահմանվում են, համապատասխանաբար,

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \ n \geq 2$$

անդրադարձ բանաձևերով: Այդ հաջորդականությունների համար գիտեք նաև ընդհանուր անդամների բանաձևերը՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{և} \quad b_n = b_1 q^{n-1}:$$

Այսինքն՝ թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները կարելի է տալ ինչպես անդրադարձ, այնպես էլ ընդհանուր անդամի բանաձևերով:

Ֆունկցիաների գումարման, բազմապատկման, բաժանման, հասպատունության, սահմանափակության և մոնոտոնության սահմանումները պահպանվում են նաև հաջորդականությունների համար:

Մասնավորապես, a_n հաջորդականությունն ***աճող*** է, եթե կամայական m և k բնական թվերի համար $m < k$ պայմանից հետևում է, որ $a_m < a_k$: Նշենք միայն, որ հաջորդականության աճող լինելն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդ անդամից (ինչո՞ւ), այսինքն՝

a_n հաջորդականությունն աճող է, եթե

$$\boldsymbol{a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ, 5 -ի բաժանվող թվերի՝

$$5, 10, 15, 20, \ldots$$

հաջորդականությունն աճող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդից (և հետևաբար՝ հաջորդներից):

a_n հաջորդականությունը նվազող է, եթե.

$$\boldsymbol{a_n > a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ՝

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$$

հաջորդականությունը նվազող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ մեծ է իր հաջորդից:

a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M>0$ թիվ, որ

$$|a_n| < M, \quad n = 1,2,3,\ldots :$$

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ: Իրոք, ակնհայտ է, որ կամայական $n \in \mathrm{N}$ համար $0 < a_n < 1$, այսինքն՝ $|a_n| \le 1$: Մյուս կողմից՝

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

ուրեմն՝ $a_n < a_{n+1}$, այսինքն՝ հաջորդականությունն աճող է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է թվային հաջորդականությունը:
2. Ո՞րն են անվանում հաջորդականության n-րդ կամ ընդհանուր անդամ:
3. Հաջորդականության տրման ի՞նչ եղանակներ գիտեք:
4. Բերեք հաջորդականությունների օրինակներ:
5. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականությունը՝ ա) աճող է, բ) նվազող է, գ) սահմանափակ է, դ) հաստատուն է:

Առաջադրանքներ

142. Գտեք a_n հաջորդականության առաջին հինգ անդամները:

ա) $a_n = n^2 - 7$, բ) $a_n = \dfrac{n-1}{n+5}$, գ) $a_n = n + (-1)^n$,

դ) $a_n = \cos \pi n$, ե) $a_n = \sin \dfrac{\pi n}{3}$, զ) $a_n = n \cdot \sin \dfrac{\pi n}{2}$:

143. Դիցուք $a_n = 2n^2 - 3$, $n \in \mathbf{N}$: Գտեք արտահայտության արժեքը:

ա) $a_7 - a_6$, բ) $3a_5 + 4a_2$, գ) $a_{n+1} + a_{n-1}$,

դ) $a_{2n} - 4a_n$, ե) $a_m - a_k$, զ) $a_{m+1} - a_m$:

144. Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության չորրորդ անդամը:

ա) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = na_n$,

բ) $a_1 = 20$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,

գ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{9}{a_n}\right)$,

դ) $a_1 = 12$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$:

145. Բանաձևով գրեք հաջորդականություն, որի առաջին երեք անդամներն են:

ա) $2,\ 4,\ 6,\ldots,$ բ) $1,\ 3,\ 5,\ldots,$ գ) $1,\ 4,\ 9,\ldots,$

դ) $2,\ 4,\ 8,\ldots,$ ե) $1,\ -1,\ 1,\ldots,$ զ) $8,\ 8,\ 8,\ldots$:

146. Ապացուցեք, որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է:

ա) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$, բ) $a_n = (-1)^n + \sin n$, գ) $a_n = \cos(n^2 - 1)$:

147. Ապացուցեք, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն է:

ա) $a_n = 5n - 7$, բ) $a_n = 4 - 2n$, գ) $a_n = 3n$,

դ) $a_n = 1 - n^3$, ե) $a_n = 2n^2 - n$, զ) $a_n = n^2 - n^3$:

Կրկնության համար

➢**148.** Բանվորը պետք է աշխատեր 4 ժամ: Նա 2 ժամ աշխատելուց հետո և 3 ժամ աշխատեց, բայց 20 % նվազ արտադրողականությամբ: Քանի՞ տոկոսով բանվորը կատարեց առաջադրանքը:

➢**149.** Որմնադիրը 7 ժամում շարել էր 12 մ² պատ, ընդ որում, առաջին 4 մ²-ն շարելուց հետո նրա արտադրողականությունն ընկել էր 20 %-ով: Քանի՞ քառակուսի մետր պատ էր շարել որմնադիրն աշխատանքն սկսելուց 3 ժամ անց:

§4. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը

Ենթադրենք՝ գնում եք մի ճանապարհով, որի եզրով շարված են համարակալված սյուներ և, տեսնելով, որ առաջին մի քանի սյուները ներկված են կարմիր գույնով, ուզում եք պարզել, թե արդյո՞ք բոլոր սյուներն են կարմիր: Իհարկե, դուք հեշտությամբ կլուծեք այս խնդիրը (մանավանդ եթե ճանապարհը շատ երկար չէ), հերթականությամբ անցնելով բոլոր սյուների կողքով:Ստուգելով յուրաքանչյուր սյան գույնը՝ կարող եք ասել, որ ***բոլոր սյուները կարմիր են***:

Քննարկելով մասնավոր դեպքերը՝ հանգեցիք ընդհանուր եզրակացության: Այն ճշմարիտ է, քանի որ ստուգվել են բոլոր սյուները: Ստահանգման այս եղանակը կոչվում է ***լրիվ ինդուկցիա***: Լրիվ ինդուկցիան կիրառվում է, երբ ընդհանուր պնդումը տրոհվում է մի քանի մասնավոր դեպքի, և քննարկվում են ***բոլոր*** հնարավոր դեպքերը:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Կամայական բնական թիվ 3-ի բաժանելիս կարող է ստացվել 0, 1 կամ 2 մնացորդ:

Եթե n-ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա $(n+2)$-ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n-ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ, ապա $(n+1)$-ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n-ը բաժանվում է 3-ի (ստացվում է 0 մնացորդ), ապա $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Հետևաբար՝ կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Այժմ պատկերացրեք, թե ճանապարհը (ինչպես և սյուների քանակը) անվերջ է, և ստուգել բոլոր սյուներն այլևս չեք կարող: Անցնելով առաջին 100 (կամ 1000000) սյան կողքով և պարզելով, որ դրանք կարմիր են, ասում եք, որ բոլոր սյուները կարմիր են: Ճի՞շտ է արդյոք նման եզրահանգումը: Քանի որ դիտարկված են ոչ բոլոր սյուները, արված եզրակացությունը կարող է լինել միայն ենթադրություն (վարկած):

Մասնավոր (ոչ բոլոր) օրինակների դիտարկման հիման վրա արված եզրակացությունը կոչվում է ***թերի ինդուկցիա:*** Որպես մտածողության ձև այն հիմնականում կիրառվում է վարկած ձևակերպելու համար, որի ճիշտ կամ սխալ լինելն այնուհետև հիմնավորվում է այս կամ այն եղանակով:

Օրինակ 2: XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պիեռ Ֆերման դիտարկել է հետևյալ հավասարությունները.

$$2^{2^1}+1=5, \quad 2^{2^2}+1=17, \quad 2^{2^3}+1=257, \quad 2^{2^4}+1=65537$$

և նկատել, որ ստացված 5, 17, 257, 65537 թվերը պարզ թվեր են: Ֆերման առաջադրել է վարկած (համոզված, որ ճիշտ է), որ կամայական բնական n-ի դեպքում $2^{2^n}+1$ թիվը պարզ թիվ է: Սակայն XVIII դարում շվեյցարացի մեծանուն մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը պարզեց, որ $n=5$ դեպքում $2^{2^5}+1$ թիվը բաղադրյալ է, այն բաժանվում է 641-ի:

Վերադառնանք անվերջ ճանապարհի խնդրին և պատկերացնենք, թե ստուգել եք, որ անվերջ ճանապարհի առաջին սյունը կարմիր է, և ներկարարից տեղեկացել եք, որ եթե որևէ մի սյուն (k-րդը) կարմիր է եղել, ապա նա հաջորդ սյունը ($(k+1)$-րդը) նույնպես կարմիր է ներկել: Այդ դեպքում կարող եք պնդել, որ բոլոր սյուները կարմիր են: Իրոք, եթե առաջին սյունը կարմիր է, ապա, ներկարարի ասածի համաձայն, կարմիր է նաև 2-րդը, ուրեմն՝ նաև 3-րդը, 4-րդը, և այլն: Այսպես՝ քայլ առ քայլ կարող ենք հասնել կամայական n-ի և պնդել, որ n-րդ սյունը կարմիր է, այսինքն՝ բոլոր սյուները կարմիր են:

Դիտարկենք «ավելի մաթեմատիկական» օրինակ՝ զուգահեռներ տանելով սյուների խնդրի հետ:Ապացուցենք, որ $a_n=n^3+5n$ հաջորդականության բոլոր անդամները բաժանվում են 6-ի (բոլոր սյուները կարմիր են): Առաջին անդամը բաժանվում է 6-ի, քանի որ $a_1=6$ (առաջին սյունը կարմիր է): Ենթադրենք՝ որևէ բնական k-ի դեպքում հաջորդականության k-րդ անդամը բաժանվում է 6-ի (ենթադրենք k-րդ սյունը կարմիր է): Այդ դեպքում՝

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 =$$
$$= k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6 = a_k + 3k(k+1) + 6:$$

Քանի որ k և $k+1$ թվերից մեկը զույգ է, ուստի զույգ է նաև $k(k+1)$-ը, և $3k(k+1)$-ը բաժանվում է 6-ի: Համաձայն մեր ենթադրության՝ a_k-ն նույնպես բաժանվում է 6-ի: Ուստի՝ a_{k+1}-ը, որպես 6-ի բաժանվող թվերի գումար, նույնպես կբաժանվի 6-ի ((k + 1) -րդ սյունը նույնպես կարմիր է): Հետևաբար՝ a_n-ը բաժանվում է 6-ի կամայական n-ի դեպքում (բոլոր սյուները կարմիր են):

Բնական n-ի համար $P(n)$-ով նշանակենք «$n^3 + 5n$ թիվը բաժանվում է 6-ի» պնդումը: Օրինակ՝

$P(1)$ պնդումն է՝ «$1^3 + 5 \cdot 1$ թիվը բաժանվում է 6-ի»,

$P(4)$ պնդումն է՝ «$4^3 + 5 \cdot 4$ թիվը բաժանվում է 6-ի»,

$P(7)$ պնդումն է՝ «$7^3 + 5 \cdot 7$ թիվը բաժանվում է 6-ի», և այլն:

Այս բոլոր պնդումները ճշմարիտ են, ավելին, փաստորեն ապացուցեցինք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Ապացույցի մեթոդը, որ կիրառեցինք, կոչվում է ***մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ***:

Թվաբանության, հանրահաշվի, երկրաչափության և մաթեմատիկայի այլ բնագավառներում երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել, որ ինչ-որ $P(n)$ պնդում, որը կախված է n բնական փոփոխականից, ճշմարիտ է այդ փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում:

Որպեսզի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար, պետք է կատարենք հետևյալ քայլերը:

1) Ապացուցենք $P(1)$ պնդումը ***(ինդուկցիայի հենք կամ հենքային քայլ)***:

2) Ենթադրենք, որ ճիշտ է $P(k)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն ենթադրություն)***:

3) Ապացուցենք, որ այդ դեպքում ճիշտ է $P(k+1)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն քայլ)***:

4) Եզրակացնենք, որ $P(n)$ պնդումը ճիշտ է կամայական բնական n-ի համար ***(եզրակացություն)***:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ d տարբերությամբ և a_1 առաջին անդամով թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամն է՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d: \qquad (1)$$

Փաստորեն՝ այստեղ $P(n)$ պնդումը հետևյալն է.

«եթե a_n թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը d է, իսկ առաջին անդամը՝ a_1, ապա $a_n = a_1 + (n-1)d$»:

1) $P(1)$ պնդումը ճիշտ է, քանի որ $a_1 = a_1 + (1-1)d$:

2) Ենթադրենք՝ $P(k)$ պնդումը ճիշտ է, այսինքն՝

$$a_k = a_1 + (k-1)d : \qquad (2)$$

3) Ապացուցենք, որ ճիշտ է $P(k+1)$ պնդումը, այսինքն՝

$$a_{k+1} = a_1 + kd : \qquad (3)$$

Իրոք, համաձայն թվաբանական պրոգրեսիայի սահմանման, $a_{k+1} = a_k + d$: Ուստի (2) առնչությունից կունենանք՝

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd :$$

4) Հետևաբար՝ (1) բանաձևը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| : \qquad (1)$$

Նախ ապացուցենք, որ կամայական a և b թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը, որն անվանում են ***եռանկյան անհավասարություն***.

$$|a+b| \le |a| + |b| : \qquad (2)$$

Իրոք, գումարելով

$$-|a| \le a \le |a| \quad և \quad -|b| \le b \le |b|$$

կրկնակի անհավասարությունները՝ կստանանք՝

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|) \ ,$$

որտեղից հետևում է (2)-ը:

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք (1) անհավասարությունը:

1) Անհավասարությունը ճիշտ է, երբ $n=1$, քանի որ $|a_1| \le |a_1|$:

2) Ենթադրենք՝ պնդումը ճիշտ է $n = k$ դեպքում, այսինքն՝ կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_k$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots |a_k| , \qquad (3)$$

3) Ապացուցենք՝ $n = k+1$ դեպքում: Օգտվելով նախ՝ (2), ապա՝ (3) անհավասարություններից, կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ թվերի համար կստանանք՝

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| \le$$
$$\le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}| :$$

4) Հետևաբար՝ (1) անհավասարությունը ճիշտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 3: Գտնենք $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$, $x_1 = 1$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

Հաշվենք հաջորդականության մի քանի անդամ.

$x_1 = 1$,

$x_2 = 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$,

$x_3 = 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$,

$x_4 = 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$:

Դժվար չէ նկատել, որ ստացված թվերը ենթարկվում են որոշակի օրինաչափության՝

$$x_1 = 1^2, \ x_2 = 2^2, \ x_3 = 3^2, \ x_4 = 4^2:$$

Կարելի է ենթադրել, որ այդ օրինաչափությանը ենթարկվում են հաջորդականության բոլոր անդամները, այսինքն՝ կամայական բնական n-ի համար

$$x_n = n^2: \tag{5}$$

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ տրված հաջորդականությունն իրոք արտահայտվում է (5) բանաձևով:

Ինչպես տեսանք, $n = 1$ դեպքում այն ճշմարիտ է:

Ենթադրելով, որ (5) բանաձևը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում, անդրադարձ բանաձևից կունենանք՝

$$x_{k+1} = x_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2:$$

Այսինքն՝ (5) բանաձևը ճշմարիտ է նաև $n = k + 1$ դեպքում: Ուրեմն՝ այն ճշմարիտ է բոլոր բնական n-երի համար:

Պատասխան՝ $x_n = n^2, \quad n \in \mathbf{N}$:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել որևէ $P(n)$ պնդում այնպիսի բնական n-երի համար, որոնք մեծ կամ հավասար են որևէ բնական m թվի: Այդպիսի դեպքում բավական է՝

1. ***ապացուցել $P(m)$ պնդումը,***

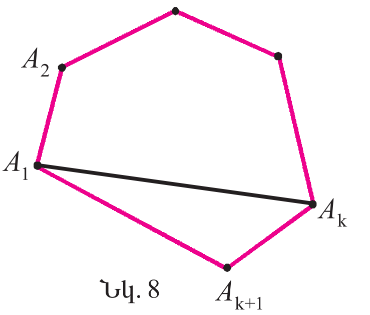
2. ***ապացուցել, որ «$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում» ենթադրությունից հետևում է, որ պնդումը ճշմարիտ է նաև $n = k + 1$ դեպքում, որտեղ $k \geq m$:***

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ ուռուցիկ n-անկյան ($n \geq 3$) ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Երբ $n = 3$, պնդումը եռանկյան ներքին անկյունների գումարի վերաբերյալ թեորեմն է:

Ենթադրենք՝ պնդումը ճիշտ է $n = k$ դեպքում, $k \geq 3$, և $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$-ը կամայական ուռուցիկ $(k+1)$-անկյուն է (նկ. 8): Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝ $A_1 A_2 \ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(k-2)$ է: Հաշվի առնելով, որ

$A_1A_2\ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $A_1A_2\ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների և $A_1A_kA_{k+1}$ եռանկյան ներքին անկյունների գումարին, եզրակացնում ենք, որ $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է՝ $180^\circ(k-2)+180^\circ = =180^\circ(k-1)$: Պնդումն ապացուցված է:



Նկ. 8

Հասկացե՛լ եք դասը

1. Ի՞նչ է լրիվ ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
2. Ի՞նչ է թերի ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
3. Ո՞ր դեպքերում է կիրառվում մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:
4. Ի՞նչ քայլեր պետք է կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացույցի դեպքում:
5. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը:
6. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ n-անկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Առաջադրանքներ

Կիրառելով լրիվ ինդուկցիա՝ հիմնավորեք պնդումը (150-152):

150. ա) Բնական թվի քառակուսու վերջին թվանշանը 1, 4, 5, 6, 9, 0 թվանշաններից որևէ մեկն է:
բ) Կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(2n+1)$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

151. ա) 3-ի չբաժանվող բնական թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 3-ի:
բ) Ամբողջ թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 2 մնացորդ:

152. Կամայական բնական n-ի դեպքում՝

ա) $n(2n^2-3n+1)$-ը բաժանվում է 6-ի, բ) (n^5-n)-ը բաժանվում է 5-ի:

153. Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով գտեք տրված հավասարման ամբողջ լուծումը նշված միջակայքում:
ա) $x^2-24x+108=0$, $(15;21)$,
բ) $x^2-24x+108=0$, $[-9;-5]$:

154. Գրել $P(1)$, $P(6)$, $P(k)$, $P(k+1)$ պնդումները, եթե $P(n)$ պնդումն է՝
ա) (n^3-n)-ը բաժանվում է 6-ի,

բ) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots n\cdot(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$,

գ) $2^{n+2}>n+4$:

155. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը:

156. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք.

ա) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը,

բ) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ հավասարությունը ճիշտ է կամայական բնական n-ի դեպքում (157-160):

157. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

158. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$:

159. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$:

160. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

➢**161.** Ապացուցել, որ անդրադարձ բանաձևով տրված a_n հաջորդականության համար՝

ա) եթե $a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n+1$, ապա $a_n=\dfrac{1}{2}\left(5\cdot 3^{n-1}-1\right)$,

բ) եթե $a_1=5,\ a_2=7,\quad a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$, ապա $a_n=3+2n$:

➢**162.** Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

ա) $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n$, բ) $a_1=1,\ a_{n+1}=n\cdot a_n$:

➢**163.** Գտնել a_n հաջորդականության ընդհանուր անդամը, եթե հայտնի է, որ $a_1=3$ և կամայական m, n բնական թվերի համար՝

ա) $a_{m+n}=a_m+a_n$, բ) $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$:

➢**164.** Դիցուք $a_1=\sqrt{2}$ և $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\in\mathbf{N}$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}:$$

165. Ապացուցել անհավասարությունը նշված բնական n-երի համար:

ա) $3^n>n^3+5,\quad n\ge 4$, բ) $2^n\ge 5n-3,\quad n\ge 5$:

գ) $3^n > 2^n + n, \quad n \geq 2$, դ) $2^n > n^2, \quad n \geq 5$:

Ապացուցեք անհավասարությունը 1-ից մեծ բնական n-երի համար (166-167):

* **166.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$:

* **167.** $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$:

➢**168.** Ապացուցել, որ 7-ից մեծ կամայական բնական թիվ կարելի է ներկայացնել 3-ների և 5-երի գումարով:

➢**169.** Դիցուք $h > -1$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$(1+h)^n \geq 1 + nh:$$

Կրկնության համար

170. Գտեք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա:

ա) $\lg\frac{x}{3}$, $\lg\sqrt{x^2-4}$, $\lg(x+2)$, բ) $\sqrt{5x+1}$, $2x$, $3x+1$:

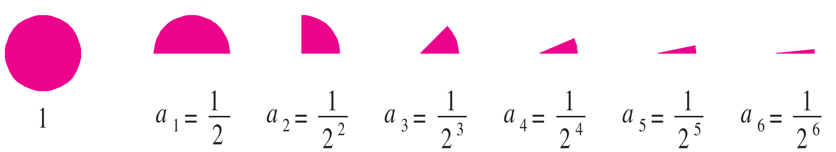
171. Գտեք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

ա) $\sqrt{x+7}$, $\sqrt{x-5}$, 1, բ) $2\lg x$, $2+\lg x$, $\frac{7}{2}+\lg x$:

§5. Անվերջ փոքրեր

Ենթադրենք ունեք մի խնձոր: Առաջին օրն ուտում եք խնձորի կեսը, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ օրն ուտում եք մնացածի կեսը: Հարց է ծագում՝ քանի՞ օրում կուտեք ամբողջ խնձորը:

Առաջին օրն ուտելուց հետո մնում է խնձորի $\frac{1}{2}$ մասը, երկրորդ օրը՝ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ մասը, երրորդ օրը՝ $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ մասը և այլն: Եթե a_n-ով նշանակենք n-րդ օրն ուտելուց հետո մնացած մասը, ապա կստանանք $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը, որի անդամները ոչ մի n-ի դեպքում զրո չեն դառնում (նկ. 9): Այսինքն՝ ճեզ երբեք չի



Նկ. 9

հաջողվի խնձորն ուտել ամբողջությամբ:

Այժմ ուրիշ հարց է ծագում՝ խնձորի ո՞ր մասը չի հաջողվի ուտել: Պարզվում է, որ այդպիսի մաս գոյություն չունի: Իրոք, որքան էլ փոքր լինի ε դրական թիվը, վերցնելով $\frac{1}{\varepsilon}$ -ից մեծ բնական n և օգտվելով $2^n > n$ ակնհայտ անհավասարությունից, ստանում ենք՝ $a_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$: Այսինքն՝ եթե $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ապա n օր ուտելուց հետո խնձորից մնում է նրա ε -ից փոքր մասը:

Հետաքրքիր իրավիճակ է ստեղծվում. մի կողմից՝ երբեք չի հաջողվում խնձորն ուտել ամբողջությամբ, մյուս կողմից՝ խնձորից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում, քանի որ խնձորից մնացած մասն անվերջ փոքրանում է:

Նման հաջորդականությունները, որոնցից «ըստ էության ոչինչ չի մնում», կարևոր դեր են խաղում հաջորդականություններ և ֆունկցիաներ ուսումնասիրելիս:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե կամայական ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ $n > N$ պայմանից հետևում է

$$|a_n| < \varepsilon \qquad (1)$$

անհավասարությունը:

Այլ կերպ կարելի է ասել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե նրա անդամները, ինչ-որ համարից սկսած, բացարձակ արժեքով փոքր են նախապես տրված կամայական դրական թվից: Փաստորեն, այդ «ինչ-որ համարն» այն բնական N -ն է, որից ավելի մեծ ինդեքսներով անդամները բավարարում են (1) անհավասարությանը:

Օրինակ 1: Ակնհայտ է, որ

$\boldsymbol{a_n = 0,\ n \in \mathbf{N}}$, ***հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:***

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ

$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n}}$ ***հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:***

Դիցուք ε -ը կամայական դրական թիվ է: Որպես N վերցնենք $\frac{1}{\varepsilon}$ -ից մեծ որևէ բնական թիվ: Այդ դեպքում, եթե $n > N$, ապա

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon\,:$$

Հետևաբար՝ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Օրինակ 3: Ստուգենք, որ

$\boldsymbol{b_n = q^n}$ ***հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե*** $\boldsymbol{|q| < 1}$:

Եթե $q = 0$, ապա ստանում ենք $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$ հաջորդականությունը, որն անվերջ փոքր է: Դիցուք $q \neq 0$ և ε-ը որևէ դրական թիվ է: Պարզենք, թե ո՞ր բնական n-երի դեպքում է ճիշտ $|b_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $0 < |q| < 1$, ուրեմն՝

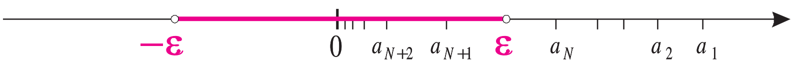
$$|b_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon :$$

Այսպիսով՝ եթե տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար վերցնենք $\log_{|q|} \varepsilon$ թվից մեծ որևէ բնական N, ապա $n > N$ պայմանից կհետևի, որ $|b_n| < \varepsilon$: Այսինքն՝ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Հարկ է նշել, որ բոլորովին կարևոր չէ գտնել փոքրագույն N-ը, որից սկսած տեղի ունի (1) անհավասարությունը: Կարևորը կամայական դրական ε-ի համար այդպիսի N-ի գոյությունն է:

Նկատենք, որ անվերջ փոքրի սահմանման մեջ $|a_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n կետն ընկած է $(-\varepsilon; \varepsilon)$ միջակայքում, ուստի a_n հաջորդականության անվերջ փոքր լինելու երկրաչափական մեկնաբանությունը հետևյալն է.

a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե կամայական ε դրական թվի համար $(-\varepsilon; \varepsilon)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր (նկ. 10)**:**



Նկ. 10

Օրինակ 4: $a_n = 1 + (-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով անդամները 2 են, իսկ կենտ համարով անդամները՝ 0: Այն անվերջ փոքր չէ, քանի որ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ միջակայքից դուրս գտնվում են անվերջ թվով a_n-եր (բոլոր զույգ համարով a_n-երը):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Կհաջողվի՞ արդյոք խնձորն ուտել ամբողջությամբ, եթե օրական ուտում եք մնացածի կեսը:
2. Խնձորի ո՞ր մասը երբեք չեք ուտի, եթե օրական ուտում եք մնացածի կեսը:
3. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում անվերջ փոքր:
4. Ապացուցեք, որ $a_n = \frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:
5. Ապացուցեք, որ $b_n = q^n$ $(|q| < 1)$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Առաջադրանքներ

172. Ուղղանկյունաձև թուղթն ունի 1 մակերես: Քանի՞ անգամ է պետք կեսից ծալել թուղթը, որպեսզի ստացված մակերեսը լինի փոքր՝ ա) 10^{-2} -ից, բ) 10^{-3} -ից:

173. Ստուգել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

ա) $a_n = \dfrac{1}{n+9}$, բ) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, գ) $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$,

դ) $a_n = \dfrac{1}{3n^2+1}$, ե) $a_n = \dfrac{3}{2^{2n}}$, զ) $a_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$:

174. a_n հաջորդականության քանի՞ անդամ է $(-\varepsilon;\varepsilon)$ միջակայքից դուրս, եթե՝

ա) $a_n = \dfrac{15}{2n+3}$, $\varepsilon = 0{,}1$, բ) $a_n = \dfrac{2}{n^2+1}$, $\varepsilon = 0{,}01$:

➢175. Ապացուցեք, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է՝

ա) $a_n = \dfrac{1}{\lg(n+1)}$, բ) $a_n = \dfrac{1}{\log_2(n+2)-1}$, գ) $a_n = 2^{-n}$:

176. Տրված ε -ի համար գտնել փոքրագույն N -ը, որից մեծ n -երի դեպքում $|a_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը ճիշտ է:

ա) $a_n = \dfrac{1}{n+5}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}1$, 2) $\varepsilon = 0{,}01$,

բ) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}01$, 2) $\varepsilon = 0{,}0001$:

➢177. Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև $b_n = a_{n+k}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը, որտեղ՝ ա) $k=1$, բ) $k=10$:

➢178. Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև b_n հաջորդականությունը, որտեղ՝

ա) $b_n = -a_n$, բ) $b_n = a_n^2$, գ) $b_n = a_n^3$,

դ) $b_n = \sqrt{|a_n|}$, ե) $b_n = |a_n|^p$, $p>0$, զ) $b_n = a_n^n$:

179. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

ա) $b_n = -\dfrac{1}{n}$, բ) $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, գ) $b_n = \dfrac{1}{n^3}$,

դ) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ե) $b_n = \dfrac{1}{n^p}$, $p>0$, զ) $b_n = \dfrac{1}{n^n}$:

180. Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

ա) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{4a^3}-2\sqrt[4]{4a}}{2-\sqrt{a}}+\dfrac{18+2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{4a}}\right):\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{4a}}$, երբ $a=5$,

բ) $\left(b+2\sqrt{b}+1\right)^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}+1}+\dfrac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}-1}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}-1}\right)$, երբ $b=2$:

181. Հաշվել արտահայտության արժեքը, եթե a-ն բավարարում է նշված հավասարմանը.

ա) $\log_{\sqrt{3}}(14-5a)$, $|10a-27|=53$, բ) $\log_{\sqrt{2}}(3-8a)$, $|24a-27|=30$:

§6. Թվաբանական գործողություններ անվերջ փոքրերով

Լեմմա 1: ***Անվերջ փոքրը սահմանափակ է:***

Այսինքն՝ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ կամայական բնական n-ի համար $|a_n|\le M$:

Ապացուցում: Քանի որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն $(-1,1)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով անդամներ: Նշանակում է՝ կարող ենք գտնել մեկից մեծ այնպիսի M թիվ, որ դուրս մնացած անդամները լինեն $(-M,M)$ միջակայքում: Այդ դեպքում $(-M,M)$ միջակայքը կպարունակի a_n հաջորդականության բոլոր անդամները, այսինքն՝ կամայական բնական n-ի համար՝ $|a_n|\le M$:

Լեմմա 2: ***Եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $|b_n|\le|a_n|$, $n\in\mathbf{N}$, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես անվերջ փոքր է:***

Լեմման անմիջականորեն հետևում է անվերջ փոքրի սահմանումից:

Լեմմա 3: ***Երկու անվերջ փոքրերի գումարը և տարբերությունն անվերջ փոքր են:***

Այսինքն՝ եթե a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ապա a_n+b_n և a_n-b_n հաջորդականությունները նույնպես անվերջ փոքր են:

Ապացուցում: Դիցուք ε -ը որևէ դրական թիվ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն N_1 և N_2 բնական թվեր, այնպիսիք, որ եթե $n > N_1$, ապա $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, իսկ երբ $n > N_2$, ապա $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$: Նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$: Այդ դեպքում, եթե $n > N$, ապա

$$|a_n \pm b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Լեմմա 4: ***Սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Այսինքն՝ եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ b_n հաջորդականությունը՝ անվերջ փոքր, ապա $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Ապացուցում: Քանի որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$, որ կամայական բնական n -ի դեպքում $|a_n| < M$: Քանի որ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} :$$

Հետևաբար՝ երբ $n > N$,

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon :$$

Հետևանք 1: ***Անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Ապացուցում: Դիցուք a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում, համաձայն 1-ին լեմմայի, a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է: Կիրառելով 4-րդ լեմման՝ համոզվում ենք, որ $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Հաշվի առնելով, որ հաստատուն հաջորդականությունը սահմանափակ է, կստանանք.

Հետևանք 2: ***Հաստատունի և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Օրինակ Ցույց տանք, որ $a_n = \dfrac{n(2^n + n)}{2^n (n+1)^2}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Ներկայացնենք a_n -ը հետևյալ կերպ.

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{2^n (n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^n} :$$

Քանի որ $\dfrac{n}{n+1}$ և $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ հաջորդականությունները սահմանափակ են, իսկ $\dfrac{1}{n+1}$ և $\dfrac{1}{2^n}$ հաջորդականությունները՝ անվերջ փոքր, 3-րդ և 4-րդ լեմմաների համաձայն՝ a_n -ը ևս կլինի անվերջ փոքր:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանափա՞կ է արդյոք անվերջ փոքր հաջորդականությունը:
2. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:
3. Ապացուցեք, որ սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:
4. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Առաջադրանքներ

182. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:

183. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (184-186):

184. ա) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, բ) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$, գ) $a_n = \frac{\sin n}{n}$,

դ) $a_n = \frac{\cos(n+1)}{2n}$, ե) $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$, զ) $a_n = \frac{5}{n \cdot 2^n}$:

185. ա) $a_n = \frac{3}{n} + \frac{5}{n+1}$, բ) $a_n = \frac{1}{2n-3} - \frac{4}{n+2}$, գ) $a_n = \frac{1}{n} + 3^{-n}$,

դ) $a_n = \frac{1}{n+1} - 2^{-n}$, ե) $a_n = \frac{3}{n(1+2^{-n})}$, զ) $a_n = \frac{2}{n(3+4^{-n})}$:

186. ա) $a_n = \frac{13\sin n + 25\cos n}{n\log_2(n+1)}$, բ) $a_n = \frac{12\sin^2 n - 7\cos n}{5n^3+1}$,

գ) $a_n = \frac{\cos(n-9)}{\lg(2n+5)} + \frac{n^5}{3^n(n^5+1)}$, դ) $a_n = \frac{54}{\operatorname{tg}^2 n+1} \cdot \frac{3}{n(1+2^{-n})}$:

187. Դիցուք $a_n = \frac{1}{n^5}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$, $c_n = \frac{5}{n^5}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ՝

ա) a_n, b_n, c_n հաջորդականություններն անվերջ փոքրեր են,

բ) $\frac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է,

➢գ) $\frac{a_n}{c_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ,

➢դ) $\frac{b_n}{a_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (188-189):

188. ա) $2+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1}$, բ) $1+\frac{25}{x-7}=\frac{16}{x-6}$:

189. ա) $\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{3-x}}=0$, բ) $\frac{3x^2+7x+2}{\sqrt{x+1}}=0$:

§7. Հաջորդականության սահման, e թիվը

Դարձյալ ենթադրենք, որ ունեք մի խնձոր և յուրաքանչյուր օր ուտում եք խնձորի մնացած մասի կեսը: Տեսնենք, թե ժամանակի ընթացքում խնձորի ո՞ր մասն եք ուտում:

Ինչպես տեսանք, այս դեպքում n-րդ օրը մնում էր խնձորի $\frac{1}{2^n}$ մասը: Հետևաբար՝ եթե a_n-ով նշանակենք n օրում կերած մասը, ապա $a_n=1-\frac{1}{2^n}$ (նկ. 11): Ուստի, թեև խնձորը երբեք լրիվ ուտել չի հաջողվի, սակայն նրանից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում, քանի որ այն ժամանակի ընթացքում գրեթե ամբողջությամբ ուտում եք, այսինքն՝ a_n-ն անվերջ մոտենում է 1-ին:

Այստեղ a_n հաջորդականությունը տարբերվում է 1 հաստատունից $\frac{1}{2^n}$ անվերջ փոքրով: Նման դեպքում ասում են, որ a_n հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի:

$a_1=1-\frac{1}{2}$ $a_2=1-\frac{1}{2^2}$ $a_3=1-\frac{1}{2^3}$ $a_4=1-\frac{1}{2^4}$ $a_5=1-\frac{1}{2^5}$ 1

Նկ. 11

a թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության սահման, եթե a_n-a հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Եթե հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում կոչվում է տարամետ:

Եթե a թիվն a_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են*՝

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \text{ կամ } a_n\to a$$

*կարդացվում է՝ a-ն հավասար է սահման a_n, երբ n-ը ձգտում է անվերջի: Այստեղ lim-ը լատիներեն limes բառի կրճատ ձևն է. որը նշանակում է սահման:

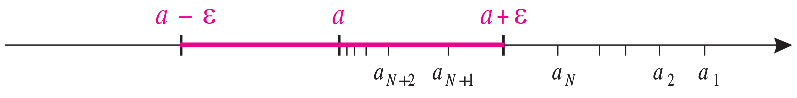
և ասում են՝ ***a_n-ը ձգտում է a-ի, կամ a_n-ը զուգամիտում է a-ի:***

Փաստորեն a_n հաջորդականությունը ձգտում է a թվին, եթե ինչ-որ համարից սկսած նրա անդամների և a-ի տարբերությունը բացարձակ արժեքով փոքր է նախապես տրված կամայական ε դրական թվից՝ $|a_n - a| \le \varepsilon$: Վերջին անհավասարությունը նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n-ը պատկանում է a կետի ε-շրջակայքին՝

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon):$$

Այստեղից կբխի հաջորդականության սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունը (նկ. 12).

a թիվը a_n հաջորդականության սահմանն է, եթե a-ի կամայական շրջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր:



Նկ. 12

Պարզ է, որ ***եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա այն զուգամետ է և նրա սահմանը 0 է՝*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Ինքնուրույն համոզվեք, որ ճշմարիտ է հետևյալ լեմման:

Լեմմա: ***Եթե β_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա կամայական a թվի համար $a_n = a + \beta_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:***

Օրինակ 1: $a_n = a$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է, և $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: Իրոք, այդ դեպքում $a_n - a = 0$, $n \in \mathbf{N}$, որը, ինչպես գիտենք, անվերջ փոքր է:

Օրինակ 2: Պարզենք $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ հաջորդականության զուգամիտությունը:

Քանի որ

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

և $\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն՝ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$:

Թեորեմ 1: ***Եթե a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա զուգամետ են նաև $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ հաջորդականությունները, ընդ որում,***

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n$:

Ապացուցում: Նշանակենք՝

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n \text{ և } b=\lim_{n\to\infty}b_n :$$

Ըստ սահմանի սահմանման՝ $\alpha_n=a_n-a$ և $\beta_n=b_n-b$ հաջորդականությունները անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$ և

$$a_n+b_n=(a+\alpha_n)+(b+\beta_n)=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n):$$

Քանի որ անվերջ փոքրերի $\alpha_n+\beta_n$ գումարն անվերջ փոքր է, լեմմայից հետևում է, որ a_n+b_n հաջորդականությունը զուգամետ է, և $a_n+b_n\to a+b$: Հանգունորեն ապացուցվում է 2-րդ հավասարությունը:

Այնուհետև՝

$$a_n\cdot b_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n :$$

Կիրառելով անվերջ փոքրերի՝ նախորդ պարագրաֆում ապացուցված հատկությունները, եզրակացնում ենք, որ $a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝ $a_nb_n\to ab$:

Քանի որ $b_n=p$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը p-ն է, 1-ին թեորեմի 3-րդ կետից կստանանք.

Հետևանք: ***Եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և p-ն որևէ թիվ է, ապա $p\cdot a_n$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և***

$$\lim_{n\to\infty}p\cdot a_n=p\lim_{n\to\infty}a_n :$$

Առանց ապացույցի ձևակերպենք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: ***Դիցուք a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ընդ որում, $b_n\neq 0$, $n\in\mathbf{N}$, և $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$: Այդ դեպքում $\frac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է, և***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n} :$$

Հաջորդականությունների մեջ կարևոր դաս են մոնոտոն հաջորդականությունները:

Դիցուք a_n հաջորդականությունն աճող է: Պարզ է, որ այդ հաջորդականության բոլոր անդամները մեծ են առաջին անդամից, ինչից հետևում է, որ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, օրինակ՝ a_1 թվով: Պարզվում է, որ եթե այն սահմանափակ լինի նաև վերևից, ապա կլինի զուգամետ: Հանգունորեն նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, իսկ նաև ներքևից սահմանափակ լինելու դեպքում դառնում է զուգամետ: Այսինքն՝ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը (որը կընդունենք առանց ապացույցի):

Թեորեմ 3: ***Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:***

Բերենք թեորեմի մի կիրառություն: Դիտարկենք

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

հաջորդականությունը, որտեղ $n!$-ը (կարդացվում է n ֆակտորիալ) 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերի արտադրյալն է՝ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$: Քանի որ

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!} > a_n,$$

ուրեմն՝ a_n հաջորդականությունն աճող է: Մյուս կողմից, օգտվելով

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1)\ \text{հատ}} = 2^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

առնչությունից, ստանում ենք, որ կամայական n-ի համար՝ $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$, և

$$a_n \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < 3:$$

Հետևաբար՝ a_n հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է: Ուրեմն, համաձայն 3-րդ թեորեմի, այն զուգամետ է. ունի սահման: Այդ սահմանը նշանակում են լատիներեն e տառով՝

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right):$$

Պարզվում է, որ e թիվը նաև հետևյալ սահմանն է.

$$\boldsymbol{e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}:$$

Այս հավասարությունը չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ e-ն իռացիոնալ թիվ է, որի առաջին նիշերն են՝

$$e = 2{,}718281828904590\ldots:$$

Հետաքրքիր է նշել, որ, ներմուծվելով «ընդամենը» որպես մի հաջորդականության սահման, e թիվը, ինչպես կտեսնենք հետագայում, կարևոր տեղ է գրավում մաթեմատիկական անալիզում, այնպես, ինչպես π թիվը՝ եռանկյունաչափության մեջ: Մասնավորապես, կարևոր դեր են խաղում e հիմքով աստիճանային և լոգարիթմական ֆունկցիաները:

e հիմքով լոգարիթմն անվանում են բնական հիմքով լոգարիթմ և նշանակում են՝ $\ln a$, այսինքն՝

$$\ln a = \log_e a:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականության սահմանն a թիվն է:
2. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում զուգամետ:
3. Ո՞րն է անվերջ փոքր հաջորդականության սահմանը:
4. Զուգամե՞տ է արդյոք հաստատուն հաջորդականությունը:
5. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների գումարը զուգամետ է:
6. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալը զուգամետ է:
7. Ձևակերպեք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:
8. Ներքևից սահմանափա՞կ է արդյոք աճող հաջորդականությունը:
9. Ձևակերպեք մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմը:
10. Ո՞ր հաջորդականությունների սահմանն է e թիվը:
11. Ինչպե՞ս են նշանակում e հիմքով լոգարիթմը:
12. Ինչպե՞ս են անվանում e հիմքով լոգարիթմը:

Առաջադրանքներ

190. Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցեք հավասարությունը:

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n+1}=1$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$,

դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}}{4^n+3^n}=4$, ե) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}+2^n}{2^{2n}-2^n}=1$, զ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n-1}=2$:

➢**191.** Որպեսզի a_n հաջորդականությունը զուգամիտի a թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $N\in\mathbf{N}$, որ $n>N$ պայմանից հետևի $|a_n-a|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Ապացուցեք:

192. Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$: Գտնել սահմանը:

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2+3x_n\right)$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n^2-x_n\right)$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5x_n-1}{x_n+1}$:

193. Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$: Հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$-ը, եթե՝

ա) $x_n=\dfrac{2a_n-b_n}{a_n-4}$, բ) $x_n=\dfrac{a_n\cdot b_n-3}{a_n+b_n}$, գ) $x_n=\dfrac{2b_n-4}{a_n+1}$,

դ) $x_n=\dfrac{a_n(a_n+b_n)}{a_n+1}$, ե) $x_n=\dfrac{b_n-2a_n}{a_n+b_n}$, զ) $x_n=\dfrac{1-b_n}{1+a_nb_n}$:

➢**194.** Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

195. Գտնել a_n հաջորդականության սահմանը, եթե՝

ա) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, բ) $a_n = \dfrac{2n+\sin n}{n}$, գ) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$,

դ) $a_n = 3-2^{-n}$, ե) $a_n = -3^{-n} + \dfrac{n+1}{n}$, զ) $a_n = 5^{-\frac{n}{2}} + n^{-1}$:

* **196.** Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից՝ ապացուցեք հաջորդականության զուգամիտությունը:

ա) $a_n = 3^{-1} + 3^{-2} + \cdots + 3^{-n}$, բ) $a_n = 1^{-1} + 2^{-2} + \cdots + n^{-n}$,

գ) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, դ) $a_n = \log_2(n+1) - \log_2 n$,

ե) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$:

* **197.** Դիցուք $0<q<1$:

ա) Ապացուցեք, որ $a_n = n\cdot q^n$ հաջորդականությունն ինչ-որ համարից սկսած մոնոտոն նվազող է:

բ) Ապացուցեք, որ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot q^n = 0$:

գ) Ապացուցեք, որ կամայական դրական k -ի դեպքում $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$:

➤ **198.** Գտնել սահմանը:

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n+1}$:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (199-200).

199. ա) $\ln(x+e)+\ln x = 2+\ln 2$, բ) $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$:

200. ա) $e^{7x^2+3x} = e^{10}$, բ) $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$:

§8. Սահմանների հաշվման օրինակներ

Այս պարագրաֆում կքննարկենք սահմանների հաշվման առավել հաճախ հանդիպող եղանակներ:

Օրինակ 1: Գտնենք հետևյալ հաջորդականության սահմանը.

$$a_n = \frac{n^3-2n+1}{2n^3-n^2+5}:$$

n բնական արգումենտով ռացիոնալ արտահայտության սահմանը հաշվելու համար կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանում են կոտորակում n-ի ամենամեծ աստիճանին: Տվյալ դեպքում դա n^3-ն է: Ստանում ենք.

$$a_n = \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}}:$$

Քանի որ $-\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ և $-\frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}$ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}\right) = 2:$$

Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի վերաբերյալ թեորեմը՝ ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n^2 + 5} = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 2: Գտնենք սահմանը՝ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 1001n}{n^4 + 10}$:

Այս դեպքում n-ի ամենամեծ աստիճանը 4-ն է: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 1001n}{n^4 + 10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n} + \frac{1001}{n^3}}{1 + \frac{10}{n^4}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1001}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{10}{n^4}\right)} = \frac{0}{1} = 0:$$

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի: Իրոք՝

$$a_n - 1 = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}:$$

Քանի որ $\frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} < 1$ և $\frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն՝ $a_n - 1$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ հաջորդականության սահմանը:

Այն դեպքերում, երբ գործ ունենք երկու արմատների տարբերության հետ, հարմար է հաջորդականության անդամները բազմապատկել և բաժանել այդ տարբերության լծորդին, այսինքն՝ նույն արմատների գումարին: Այս դեպքում կստացվի՝

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}:$$

Հետևաբար՝ $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$: Հաշվի առնելով, որ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0:$$

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 5: Գտնենք $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ հաջորդականության սահմանը: Նախ՝

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}:$$

Այնուհետև, համարիչն ու հայտարարը բաժանելով n-ի, ստանում ենք՝

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}:$$

Հետևաբար (տե՛ս 3-րդ օրինակը)՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 6: Ենթադրելով, որ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{4}$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը զուգամետ է (համոզվեք ինքնուրույն), գտնենք նրա սահմանը: Նշանակելով $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ և հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, ստանում ենք $x = \frac{x+6}{4}$ հավասարումը, որտեղից՝ $x = 2$: Հետևաբար՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$:

Պատասխան՝ 2:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող հաջորդականության սահմանը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում արմատների տարբերություն պարունակող հաջորդականության սահմանը:
3. Ինչպե՞ս են գտնում անդրադարձ բանաձևով տրվող հաջորդականության սահմանը, եթե հայտնի է, որ այն գոյություն ունի:

Առաջադրանքներ

201. Գտեք a_n հաջորդականության սահմանը:

ա) $a_n = \frac{2n+1}{5n-3}$, բ) $a_n = \frac{4n-5}{8n+3}$,

գ) $a_n = \frac{5n-\sqrt{n}-3}{n+2\sqrt{n}+4}$, դ) $a_n = \frac{3n+5\sqrt[3]{n}-8}{2n-3\sqrt{n}+9}$:

202. Գտեք սահմանը:

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2-200}{2n^3-2n+12}$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^4-1}{n-2n^4}$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{99}-n^{21}}{2n^{21}-4n^{99}+1}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^5-1}{n^5-n^3+1}$:

203. Ապացուցեք, որ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

ա) $\frac{n-1}{1+n^2}$, բ) $\frac{n^{12}-n^{11}}{n^{11}-2n^{13}}$, գ) $\frac{1-n^3+n}{n^2+n^5}$:

➢**204.** Գտեք սահմանը:

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+100}-\sqrt{n}\right)$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n-1}$:

➢**205.** Գիտենալով, որ a_n հաջորդականությունը զուգամիտում է դրական թվի, գտեք այդ թիվը:

ա) $a_1 = 0{,}5, \quad a_{n+1} = a_n(2-a_n), \quad n\in\mathbf{N}$,

բ) $a_1 = \sqrt[4]{27}, \quad a_{n+1} = \sqrt[4]{27a_n}, \quad n\in\mathbf{N}$,

գ) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{17}{a_n}\right), \quad n\in\mathbf{N}$:

* **206.** Ապացուցեք, որ $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$, $n\in\mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք նրա սահմանը:

Կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (207-208):

207. ա) $\sqrt{2x+2}+3=x$, բ) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$:

➢**208.** ա) $\left(3x^2-16x+16\right)\sqrt{x^2-2x-3}=0$, բ) $\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x^2-x-2}=0$:

Գլուխ 4
Ֆունկցիայի անընդհատությունը: Ածանցյալ

§1. Ֆունկցիայի անընդհատությունը

Քառակուսու մակերեսը գտնելու համար անհրաժեշտ է չափել նրա կողմի երկարությունը և հաշվել դրա քառակուսին: Իհարկե, մակերեսի արժեքի ճշգրտությունը կախված է նրանից, թե որքա՞ն է ճիշտ չափված կողմի երկարությունը: Պարզ է, որ քառակուսու կողմի փոքր փոփոխության դեպքում նրա մակերեսը քիչ է փոխվում: Հետևաբար՝ եթե կողմը չափելիս թույլ տրված սխալը փոքր է, ապա մակերեսի համար ստացված արժեքը քիչ է տարբերվում մակերեսի իրական արժեքից: Այսինքն՝ կարելի է ասել, որ քառակուսու մակերեսն անընդհատորեն է կախված նրա կողմի երկարությունից, կամ քառակուսու մակերեսն անընդհատ ֆունկցիա է նրա կողմի երկարությունից:

Ասում են, որ f ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթի x_0 կետում, եթե f-ի որոշման տիրույթի կամայական x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ պայմանից հետևում է, որ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \qquad (1)$$

Սահմանի սահմանման համաձայն՝ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում նշանակում է, որ կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$y_n = f(x_0 + h_n) - f(x_0)$$

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (եթե $x_0 + h_n \in D(f)$, $n \in \mathbf{N}$):

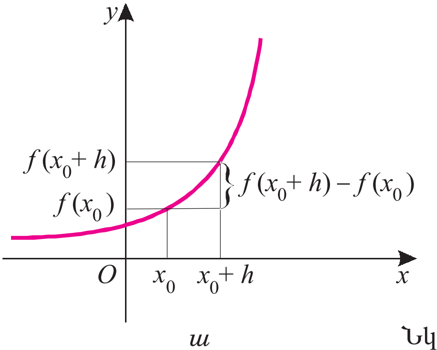
Ընդունված է $f(x_0 + h) - f(x_0)$ տարբերությունն անվանել ***արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ*** կամ պարզապես ***ֆունկցիայի աճ*** x_0 կետում: Այս պայմանավորվածությամբ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում կարելի է ձևակերպել նաև այսպես.

Ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե այդ կետում արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ:

Իհարկե, ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի որոշ կետերում կարող է լինել անընդհատ, իսկ այլ կետերում՝ չլինել:

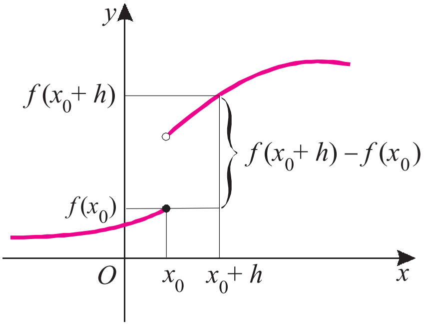
Ֆունկցիան անվանում են անընդհատ, եթե այն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի կամայական կետում:

Օրինակ, 13, *ա* նկարում պատկերված ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ 13, *բ* նկարում պատկերված ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ չէ:



ա

Նկ. 13



բ

Օրինակ 1: Դիցուք $f(x)=2$, $x\in[-1;1]$:

$[-1;1]$ հատվածի կամայական x_0 կետի և այդ հատվածի՝ x_0-ին ձգտող կամայական x_n հաջորդականության համար $f(x_n)=2,\ n\in\mathbf{N}$, ուստի՝

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=2=f(x_0)\,:$$

Հետևաբար՝ f-ն անընդհատ ֆունկցիա է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ

կամայական բազմությունում որոշված հաստատուն ֆունկցիան անընդհատ է:

Օրինակ 2: $f(x)=x$ ***ֆունկցիան անընդհատ*** է:

Իրոք, եթե $x_0\in\mathbf{R}$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=x_0=f(x_0)\,:$$

Օգտվելով հաջորդականության սահմանի հատկություններից՝ կարելի է ապացուցել, որ ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը:

Անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը, քանորդը և համադրույթն անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Այսինքն՝ եթե f և g ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում, ապա $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ և $\dfrac{f}{g}$ ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթների բոլոր կետերում:

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ այստեղից կստանանք, որ վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումարն անընդհատ է (ապացուցեք ինքնուրույն):

Հետևանք 1: ***Հաստատունի և անընդհատ ֆունկցիայի արտադրյալն անընդհատ ֆունկցիա է:***

Հետևանք 2: ***Կամայական*** $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ ***բազմանդամ անընդհատ ֆունկցիա է:***

Իրոք, քանի որ $f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուրեմն անընդհատ են $x,\ x^2,\ x^3,\ldots$ ֆունկցիաները, որպես անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալներ: Համաձայն 2-րդ հետևանքի՝ անընդհատ են նաև $a_k x^k$, $k=1,2,\ldots,n$ և a_0 ֆունկցիաները և, հետևաբար, դրանց գումար $P(x)$ բազմանդամը:

Քանի որ անընդհատ ֆունկցիաների քանորդն անընդհատ ֆունկցիա է, այստեղից կստանանք.

Հետևանք 3: ***Ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող***

$$R(x)=\frac{a_k x^k+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

ֆունկցիան անընդհատ է:

Օրինակ 3: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ ֆունկցիան անընդհատ է:

Նշենք, որ $y=x^3$ և $y=x^2-1$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ դրանց հարաբերությունը՝ f ֆունկցիան, անընդհատ է իր որոշման տիրույթում, այսինքն՝ երբ $x\neq\pm1$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $f: X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում:
2. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում անընդհատ:
3. Բերեք անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ:
4. Ի՞նչն են անվանում արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ x_0 կետում:
5. Ձևակերպեք x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունն արգումենտի և ֆունկցիայի աճերի տերմիններով:
6. Ի՞նչ կարող եք ասել անընդհատ ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի ու համադրույթի անընդհատության մասին:

Առաջադրանքներ

209. Ապացուցեք, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ ա) $x_0=1$ կետում, բ) $x_0=0$ կետում, գ) կամայական կետում:

210. Ապացուցեք ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում:

ա) $f(x)=x^2-1$, $x_0=-1$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=0$, դ) $f(x)=x^3-x^2$, $x_0=1$,

ե) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, զ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0=8$:

211. Գտեք արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x_0 կետում, եթե՝

ա) $f(x)=2x^2-1$, $x_0=3$, $h=-0{,}2$, բ) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$, $x_0=-3$, $h=0{,}1$,

գ) $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$, $h=\dfrac{\pi}{12}$, դ) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $h=-\dfrac{\pi}{12}$:

212. Գտեք արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x կետում, եթե՝

ա) $f(x)=x^2$, բ) $f(x)=x^3$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\sqrt{x}$:

213. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցեք x^2, x^3, $\dfrac{1}{x}$ և $\sqrt{x}$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

214. Ապացուցեք, որ եթե f ֆունկցիան անընդհատ է, ապա անընդհատ է նաև g ֆունկցիան, որտեղ՝

ա) $g(x)=f^2(x)$, բ) $g(x)=f^3(x)$,

գ) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, դ) $g(x)=\sqrt{f(x)}$,

ե) $g(x)=|f(x)|$, զ) $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-1}$:

215. Խորանարդի x կողը ստացել է h աճ: Գտեք լրիվ մակերևույթի աճը:

Կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (216-217):

216. ա) $\sqrt{3-2x}\log_2(x-1)=0$, բ) $\sqrt{x-4}\ln(x-5)=0$:

217. ա) $\log_{x-1}(3x+1)=2$, բ) $\log_x\left(6+x-x^2\right)=2$:

§2. Տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը

Մաթեմատիկական անալիզում կարևոր նշանակություն ունեն տարրական ֆունկցիաները:

1) $f(x)=b$ ***հաստատուն ֆունկցիան տարրական ֆունկցիա է,***

2) $f(x)=x$ ***ֆունկցիան տարրական ֆունկցիա է,***

3) ***աստիճանային, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները տարրական ֆունկցիաներ են,***

4) ***եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները (*** $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ ***) տարրական ֆունկցիաներ են,***

5) ***տարրական ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը և քանորդը տարրական ֆունկցիաներ են,***

6) ***տարրական ֆունկցիաների համադրույթը տարրական ֆունկցիա է:***

Այս սահմանումից հետևում է, որ կամայական $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ բազմանդամ տարրական ֆունկցիա է: Տարրական ֆունկցիաներ են նաև $\sin(x^2-1)$, $\operatorname{tg}(\ln x)$, $\arcsin x+\sqrt{x}$ ֆունկցիաները:

Օրինակ 1: ա) $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ $\sqrt{x}=x^{1/2}$, իսկ $y=x^{1/2}$ աստիճանային ֆունկցիան տարրական է:

բ) $y=|x|$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ այն $u(x)=x^2$ և $v(x)=\sqrt{x}$ տարրական ֆունկցիաների համադրույթն է՝ $|x|=\sqrt{x^2}$:

գ) Դիցուք $f(x)=\begin{cases} x, & \text{եթե } x>0 \\ 0, & \text{եթե } x\le 0 \end{cases}$, $\quad g(x)=\begin{cases} 0, & \text{եթե } x>0 \\ x, & \text{եթե } x\le 0 \end{cases}$: Այս ֆունկցիաները տարրական են, ինչը հետևում է $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$ և $g(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$ հավասարություններից:

դ) $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ

$$\sqrt[3]{x}=[f(x)]^{1/3}-[-g(x)]^{1/3},$$

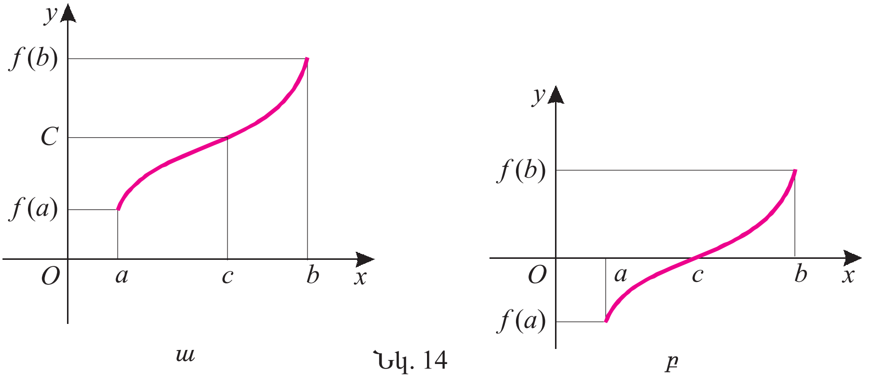
որտեղ f և g ֆունկցիաները սահմանված են նախորդ կետում:

Արդեն գիտենք, որ հաստատուն ֆունկցիան և $f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ ֆունկցիաներ են: Անընդհատ ֆունկցիաներ են նաև աստիճանային, ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները: Հաշվի առնելով, որ անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը և համադրույթն անընդհատ ֆունկցիաներ են, եզրակացնում ենք.

բոլոր տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են:

Անընդհատ ֆունկցիաներն ունեն մի շատ կարևոր հատկություն, որը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 1 (միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ)***: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում կամայական C թվի համար, որն ընկած է $f(a)$ և $f(b)$ թվերի միջև, գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=C$*** (նկ. 14, *ա*)***:***



ա Նկ. 14 *բ*

Այս թեորեմը, որը կընդունենք առանց ապացուցման, բացահայտում է անընդհատ ֆունկցիաների կարևոր հատկություններից մեկը. եթե $[a;b]$ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիան այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է A և B արժեքները ($A<B$), ապա $[A,B]$ միջակայքն ամբողջությամբ ընկած է ֆունկցիայի արժեքների բազմության մեջ:

Մասնավորապես, եթե ֆունկցիան հատվածի ծայրակետերից մեկում լինի բացասական, իսկ մյուսում՝ դրական, ապա հատվածի որևէ կետում այն կդառնա զրո: Այս փաստը ձևակերպված է հաջորդ թեորեմում, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ:

Թեորեմ 2: ***Եթե $[a,b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան a և b կետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=0$:***

Երկրաչափորեն այս թեորեմը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ.

եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկի ծայրակետերն աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում են, ապա այն հատում է աբսցիսների առանցքն (a,b) միջակայքում (նկ. 14, *բ*)***:***

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ $2^{x+2}=5x^2+2x+3$ հավասարումը $(0;1)$ միջակայքում ունի գոնե մեկ արմատ:

Դիտարկենք $f(x)=2^{x+2}-5x^2-2x-3$ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[0;1]$ միջակայքում, և $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$: Համաձայն 2-րդ թեորեմի, $(0;1)$ միջակայքում կա այնպիսի c թիվ, որ $f(c)=0$, այսինքն՝ c-ն տրված հավասարման արմատ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիաներն են անվանում տարրական:
2. Արդյո՞ք տարրական ֆունկցիա է $y=|x|$ ֆունկցիան, $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան:

Առաջադրանքներ

218. Հիմնավորեք, որ f-ը տարրական ֆունկցիա է և գտեք դրա որոշման տիրույթը.

ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$,

գ) $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\arccos(x+2)$:

219. Հիմնավորեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները տարրական ֆունկցիաներ են.

ա) $y=\sqrt[4]{x}$, բ) $y=\sqrt[5]{x}$, գ) $y=\sin|x|$,

դ) $y=|\operatorname{tg} x-2|$, ե) $y=\sqrt{\ln x}$, զ) $y=\ln\sqrt{x}$:

220. Հիմնավորեք, որ նշված միջակայքում հավասարումն ունի գոնե մեկ արմատ:

ա) $x^3+5x^2-7=0$, $[1;2]$, բ) $x^4+6x^3-1=0$, $[0;1]$,

գ) $2\cos x-x=0$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, դ) $\ln(x+5)-5x=0$, $[-4;4]$:

Կրկնության համար

221. Երեք բանվոր աշխատելով միասին՝ երեք օրում պատրաստում են 129 դետալ. ընդ որում, առաջինը երկու օրում պատրաստում է այնքան դետալ, որքան երրորդը՝ երեք օրում, իսկ երկրորդը հինգ օրում պատրաստում է այնքան, որքան առաջինը՝ վեց օրում: Քանի՞ դետալ է պատրաստում երկրորդ բանվորը մեկ օրում:

222. Երեք տրակտոր աշխատելով միասին՝ չորս օրում վարում են 248 հա: Երկրորդ տրակտորը երկու օրում վարում է 2 հա պակաս, քան առաջինը և երրորդը վարում են միասին մեկ օրում: Երրորդ տրակտորը 5 օրում վարում է այնքան, որքան երկրորդը՝ 6 օրում: Օրական քանի՞ հեկտար է վարում յուրաքանչյուր տրակտորը:

§3. Ակնթարթային արագություն և արագացում

Գիտենք, որ հաստատուն արագությամբ շարժվող մարմնի արագությունը հավասար է որոշակի ժամանակում նրա անցած ճանապարհի և այդ ժամանակի հարաբերությանը: Սակայն բնության մեջ մարմիններն ավելի հաճախ շարժվում են ոչ հավասարաչափ: Օրինակ՝ նկատած կլինեք, որ մեքենայի շարժման ընթացքում նրա արագաչափի ցուցմունքն անընդհատ փոփոխվում է: Տեսնենք, թե ինչպես կարելի է որոշել ոչ հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:

Դիցուք նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով ձախից աջ՝ $s(t)$ օրենքով, այսինքն՝ ժամանակի t պահին այն գտնվում է $s(t)$ կետում ($0 \le t < \infty$): Գտնենք t_0 պահին $V(t_0)$ արագությունը:

Կետը t_0-ից $t_0 + h$ ժամանակահատվածում անցնում է $s(t_0 + h) - s(t_0)$ ճանապարհ: Այդ ժամանակահատվածում կետի ***միջին արագությունը*** կլինի՝

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}: \qquad (1)$$

Առաջին պարագրաֆում $s(t_0 + h) - s(t_0)$ մեծությունն անվանել ենք արգումենտի h աճին համապատասխանող $s(t)$ ֆունկցիայի աճ t_0 կետում: Փաստորեն h ժամանակահատվածում կետի միջին արագությունն այդ ժամանակահատվածում «ճանապարհի աճի» հարաբերությունն է «ժամանակի աճին»:

Պարզ է, որ ինչքան փոքր լինի h ժամանակահատվածը, այնքան միջին արագությունը մոտ կլինի t_0 պահին կետի $V(t_0)$ արագությանը: Այսինքն՝ անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը, կարող ենք ստանալ կետի ճշգրիտ արագությունը t_0 պահին, որն անվանում են ***ակնթարթային արագություն***: Այսպիսով՝ նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$V(t_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{s(t_0 + h_n) - s(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է ($h_n \ne 0,\ n \in \mathbf{N}$):

Օրինակ 1: Դիցուք ուղղագիծ շարժվող մարմինը շարժման առաջին t վայրկյանում անցնում է $s(t) = 3t^2 + 2t$ մետր ճանապարհ: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագությունը $[10; 11]$ ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին,

գ) ակնթարթային արագությունը 11-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ($[10; 11]$ ժամանակահատվածում) կլինի՝

$$\frac{s(11)-s(10)}{1}=3\cdot 11^2+2\cdot 11-3\cdot 10^2-2\cdot 10=65 \text{ (մ/վրկ):}$$

բ) Դիցուք h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{s(10+h_n)-s(10)}{h_n}=\frac{3\cdot(10+h_n)^2+2\cdot(10+h_n)-3\cdot 10^2-2\cdot 10}{h_n}=$$

$$=\frac{62\cdot h_n+3\cdot h_n^2}{h_n}=62+3h_n:$$

Քանի որ $62+h_n\to 62$, մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 10-րդ վայրկյանին 62 մ/վրկ է:

գ) Հանգունորեն կստանանք՝

$$\frac{s(11+h_n)-s(11)}{h_n}=68+3h_n,$$

ուստի՝ մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանին 68 մ/վրկ է: Ինչպես տեսանք, մարմինը շարժվում է ոչ հավասարաչափ: Նրա միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ավելի մեծ է, քան ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին և ավելի փոքր, քան ակնթարթային արագությունը՝ 11-րդ վայրկյանին:

Այժմ ենթադրենք, թե նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով և հայտնի է ժամանակի կամայական t պահին կետի $V(t)$ արագությունը: Գտնենք t_0 պահին կետի $a(t_0)$ արագացումը:

Կետի արագության փոփոխությունը t_0-ից t_0+h ժամանակահատվածում կլինի՝ $V(t_0+h)-V(t_0)$: Հետևաբար՝ այդ ժամանակահատվածում ***միջին արագացումը*** կլինի՝

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}:$$

Անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը՝ կստանանք կետի ճշգրիտ արագացումը t_0 պահին, որն անվանում են ***ակնթարթային արագացում:*** Այսպիսով՝ նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$a(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{V(t_0+h_n)-V(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է ($h_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N}$):

Օրինակ 2: Դիցուք ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը շարժման t-րդ վայրկյանին որոշվում է $V(t)=t^3+5t$ (մ/վրկ) բանաձևով: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագացումը [4; 4,5] ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագացումը կլինի՝

$$\frac{V(4{,}5)-V(4)}{0{,}5}=2\left(4{,}5^3+4\cdot 4{,}5-4^3-4\cdot 4\right)=58{,}25 \text{ (մ/վրկ}^2\text{)}:$$

բ) Դիցուք h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{V(4+h_n)-V(4)}{h_n}=\frac{\cdot(4+h_n)^3+4\cdot(4+h_n)-4^3-4\cdot 4}{h_n}=$$

$$=\frac{52\cdot h_n+12\cdot h_n^2+h_n^3}{h_n}=52+12\cdot h_n+h_n^2\ :$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(52+12\cdot h_n+h_n^2\right)=52$, մարմնի ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին 52 մ/վրկ^2 է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի միջին արագությունը:
3. Ինչպե՞ս որոշել $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին:
4. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի ակնթարթային արագացումը, եթե հայտնի է, թե ինչ օրենքով է փոփոխվում նրա արագությունը:

Առաջադրանքներ

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (223-224).

223. $s(t)=2t^2$, ա) $\Delta=[1;\ 2]$, բ) $\Delta=[1;\ 1{,}5]$, գ) $\Delta=[1;\ 1{,}2]$:

224. $s(t)=3t^2+t$, ա) $\Delta=[2;\ 3]$, բ) $\Delta=[2;\ 2{,}25]$, գ) $\Delta=[2;\ 2{,}1]$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագությունը t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (225-226).

225. $s(t)=6t+7{,}5$, ա) $\Delta=[0;\ 2]$, $t_0=1$, բ) $\Delta=[1;\ 4]$, $t_0=2$:

226. $s(t)=t^2$, ա) $\Delta=[4;\ 6]$, $t_0=5$, բ) $\Delta=[2;\ 5]$, $t_0=2$:

Գտեք մարմնի միջին արագացումը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագացումը

t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոփոխվում է $V(t)$ օրենքով (227-228).

227. $V(t)=2t+3t^2$ ա) $\Delta=[0;4]$, $t_0=4$, բ) $\Delta=[3;4]$, $t_0=3$:

228. $V(t)=t^3+6t$, ա) $\Delta=[5;6]$, $t_0=5{,}5$, բ) $\Delta=[4;6]$, $t_0=5$:

Կրկնության համար

229. A և B վայրերից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար: Առաջինը B հասավ հանդիպումից 2,5 ժ անց, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից 1,6 ժ անց: Քանի՞ ժամ տևեց յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի ուղևորությունը:

230. A վայրից դեպի B վայրը դուրս եկավ բեռնատար մեքենան: Միաժամանակ B-ից A շարժվեց մարդատար մեքենան: Բեռնատարը 1 ժ անց հանդիպեց մարդատարին և ևս 1,5 ժ անց հասավ B վայր: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեց մարդատար մեքենան B-ից A ճանապարհին:

§4. Ածանցյալ

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ:

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան և ենթադրենք՝ x_0-ն դրա որոշման տիրույթի ներքին կետ է, այսինքն՝ կա x_0-ի շրջակայք, որն ընկած է $D(f)$-ում:

Ասում են, որ f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի համար[*] զուգամետ է

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \qquad (1)$$

հաջորդականությունը:

Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա (1) հաջորդականության սահմանն անվանում են f ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակում $f'(x_0)$ (կարդացվում է՝ էֆ շտրիխ x_0).

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}:$$

Դիցուք D-ն այն բազմությունն է, որի կետերում $y=f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է: Այդ բազմության յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով $f'(x)$ թիվը՝ կստանանք D բազմությունում որոշված ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան անվանում են $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում f' կամ y':

---

[*] Այստեղ և ստորև դիտարկված h_n անվերջ փոքրերն այնպիսին են, որ կամայական n-ի դեպքում $h_n\neq 0$ և $x_0+h_n\in D(f)$:

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ ածանցյալն ունի հետևյալ ***ֆիզիկական իմաստները***.

ա) ***$s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին.***

$$V(t)=s'(t):$$

բ) ***Եթե ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով, ապա մարմնի $a(t)$ արագացումը ժամանակի t պահին հավասար է $V(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին.***

$$a(t)=V'(t):$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=a$ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կամայական x_0 կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{a-a}{h_n}=0:$$

Հետևաբար՝ ***հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է***:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիայի ածանցյալը: Կամայական x կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{k(x+h_n)+b-(kx+b)}{h_n}=k:$$

Հետևաբար,

$$(kx+b)'=k:$$

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Պարզ է, որ

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{(x+h_n)^2-x^2}{h_n}=2x+h_n\to 2x,$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$(x^2)'=2x:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{\dfrac{1}{x+h_n}-\dfrac{1}{x}}{h_n}=-\frac{1}{x(x+h_n)}:$$

Եթե h_n-ն անվերջ փոքր է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}(x+h_n)=x$: Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը՝ կստանանք

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to -\frac{1}{x^2}:$$

Այսպիսով՝ $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան ածանցելի է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում և

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \frac{\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}}{h_n} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)}{h_n\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}}:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x+h_n}=\sqrt{x}$, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Այսպիսով՝

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում:
2. Ո՞րն է x_0 կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիան:
4. Ի՞նչ ֆիզիկական իմաստներ ունի ածանցյալը:
5. Ո՞րն է հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Որո՞նք են $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիաների ածանցյալները:

Առաջադրանքներ

Գտնել f ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (231-234).

231. $f(x)=5$, ա) $x_0=2$, բ) $x_0=-500$, գ) $x_0=12$:

232. $f(x)=3x-2$, ա) $x_0=3$, բ) $x_0=-8$, գ) $x_0=21{,}6$:

233. $f(x)=x^2$, ա) $x_0=7{,}5$, բ) $x_0=-9{,}25$, գ) $x_0=32{,}5$:

234. $f(x)=\frac{1}{x}$, ա) $x_0=0{,}5$, բ) $x_0=-1$, գ) $x_0=3$:

Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել $f'(x_0)$-ն (235-237).

235. $f(x)=2x^2-1$, ա) $x_0=2$, բ) $x_0=-3{,}75$, գ) $x_0=0{,}25$:

➤ **236.** $f(x)=x^3$, ա) $x_0=1$, բ) $x_0=-4$, գ) $x_0=3$:

➤ **237.** $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, ա) $x_0=-4$, բ) $x_0=0$, գ) $x_0=2$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը ժամանակի t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (238-239):

238. $s(t)=t^2-2t$ ա) $t_0=3$, բ) $t_0=5$, գ) $t_0=1$:

239. $s(t)=\sqrt{t}$, ա) $t_0=1$, բ) $t_0=4$, գ) $t_0=9$:

240. Գտեք ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագացումը t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոխվում է $V(t)=\sqrt{2t}$ օրենքով:

ա) $t_0=2$, բ) $t_0=8$, գ) $t_0=18$:

Կրկնության համար

Լուծել անհավասարումը (241-242):

➤ **241.** ա) $x^4-5x^2-6>0$, բ) $x^4-10x^2+9\le 0$:

➤ **242.** ա) $\log_{0,5}(2^x-6)+x-2\ge 0$, բ) $\log_5(25^x-4)-2x+1<0$:

§5. Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները

Այս պարագրաֆում կսովորենք երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության և արտադրյալի ածանցման (ածանցյալի հաշվման) կանոնները:

Թեորեմ 1: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, իսկ k-ն հաստատուն է, ապա $k\cdot f$, $f+g$ և $f-g$ ֆունկցիաները նույնպես ածանցելի են այդ կետում, ընդ որում,***

$$(k\cdot f)'=k\cdot f',\qquad (f+g)'=f'+g',\qquad (f-g)'=f'-g':$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=5\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Համաձայն 1-ին թեորեմի՝

$$f'(x)=5\cdot\left(\sqrt{x}\right)'+3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}:$$

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $f \cdot g$ ֆունկցիան, ընդ որում,***

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g':$$

Օրինակ 2: ա) $\left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' = x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$:

բ) $\left(x^4\right)' = \left(x \cdot x^3\right)' = x' \cdot x^3 + x \cdot \left(x^3\right)' = x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ

մեկից մեծ կամայական n բնական թվի համար

$$(x^n)' = nx^{n-1}: \qquad (1)$$

Օրինակ 3: Գտնենք $y = x^4 - 2x^3 + 5x + 12$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կիրառելով (1) բանաձևը և 1-ին թեորեմը՝ ստանում ենք՝

$$(x^4 - 2x^3 + 5x + 12)' = (x^4)' - 2(x^3)' + 5(x)' + (12)' = 4x^3 - 6x^2 + 5:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար հաստատունի և ֆունկցիայի արտադրյալի ածանցյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների գումարի ածանցյալը:
3. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների տարբերության ածանցյալը:
4. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալը:
5. Ապացուցեք $(x^n)' = nx^{n-1}$ բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (243-248).

243. ա) $f(x) = x^2 + 5x$, բ) $f(x) = 3x - x^2 + 7$:

244. ա) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x$, բ) $f(x) = 9 - x^5 + x^3$:

245. ա) $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3$, բ) $f(x) = \frac{5}{x} - \sqrt{x}$:

246. ա) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, բ) $f(x) = 2x + \sqrt{x} - \frac{2}{x}$:

247. ա) $f(x) = \sqrt{x}\left(x^3 - 2x^2\right)$, բ) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(2 + 3x - x^3\right)$:

248. ա) $f(x) = \frac{1}{x}\left(3 - \sqrt{x}\right)$, բ) $f(x) = (2x - 1)\left(\sqrt{x} - 1\right)$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (249-250).

249. $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x$, ա) $x_0 = 1$, բ) $x_0 = 4$:

250. $f(x)=2x^3-\sqrt{2x}-\dfrac{2}{x}$, ա) $x_0=0{,}5$, բ) $x_0=2$ ։

251. Լուծել $f'(x)=0$ հավասարումը:

ա) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2{,}5x^2+6x-1$, բ) $f(x)=x^5-10x^3+40x$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+9x$, դ) $f(x)=\dfrac{4}{x}+25x-6$ ։

252. Լուծել $f'(x)>0$ անհավասարումը:

ա) $f(x)=x^3-6x^2-63x-2$, բ) $f(x)=x^3-12x+56$ ։

Կրկնության համար

➢ **253.** Գտնել նշված միջակայքում տրված ֆունկցիայի հակադարձը ։

ա) $y=x^2+x-7$, $[0;3]$, բ) $y=x^2+x-7$, $[-3;-1]$:

գ) $y=2^x+2^{-x}$, $[0;1]$, դ) $y=3^x+3^{-x}$, $[-1;0]$:

§6. Երկու ֆունկցիաների քանորդի և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները

Նախորդ պարագրաֆում սովորեցինք ածանցել երկու ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը: Հետևյալ երկու թեորեմներով տրվում է քանորդի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: ***Եթե g ֆունկցիան ածանցելի է x կետում և $g(x)\neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\dfrac{1}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում,***

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}\ : \qquad (1)$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y=\dfrac{1}{x^n}$ ֆունկցիայի ածանցյալը, որտեղ n-ը որևէ բնական թիվ է:

Օգտվենք 1-ին թեորեմից և նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևից.

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{\left(x^n\right)'}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{n}{x^{n+1}}\ :$$

Այս օրինակում ստացված հավասարությունը գրելով հետևյալ կերպ`

$$\left(x^{-n}\right)'=-nx^{-n-1},$$

համոզվում ենք, որ նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևը ճշմարիտ է նաև բացասական ամբողջ թվերի համար:

Կարելի է ապացուցել, որ այդ բանաձևը ճշմարիտ է կամայական ցուցիչի դեպքում:

Կամայական α իրական թվի համար

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}:$$

Այս բանաձևը չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ, բացի α -ի ամբողջ արժեքներից, այն ապացուցել ենք նաև $\alpha = \frac{1}{2}$ դեպքում:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում և $g(x) \neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում,***

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $y = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Կիրառելով ածանցման կանոնները՝ ստանում ենք՝

$$\left(\frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}\right)' = \frac{\left(x^3 - 3x\right)' \cdot \left(1 + 4x^5\right) - \left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(1 + 4x^5\right)'}{\left(1 + 4x^5\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(3x^2 - 3\right)\left(1 + 4x^5\right) - \left(x^3 - 3x\right)\left(20x^4\right)}{\left(1 + 4x^5\right)^2} = \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{\left(1 + 4x^5\right)^2}:$$

Թեորեմ 3: Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է, ապա $F(x) = f(kx + b)$ ֆունկցիան նույնպես ածանցելի է, և

$$F'(x) = k \cdot f'(kx + b):$$

Օրինակ 3: Գտնենք $y = (3x - 5)^{100}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Եթե նշանակենք $f(x) = x^{100}$, ապա տրված ֆունկցիան կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$y = f(3x - 5):$$

Հետևաբար՝ $f'(3x - 5) = 100 \cdot (3x - 5)^{99}$, և

$$\left((3x - 5)^{100}\right)' = 3 \cdot 100 \cdot (3x - 5)^{99} = 300 \cdot (3x - 5)^{99}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է $\frac{1}{g(x)}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

2. Ձևակերպեք երկու ֆունկցիաների քանորդի ածանցման կանոնը:

3. Ձևակերպեք $f(kx+b)$ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (254-260):

254. ա) $f(x)=x^3+4\cdot x^{3,5}$, բ) $f(x)=x^{\frac{5}{4}}-3\cdot x^{-\frac{1}{3}}$,

գ) $f(x)=x^{\pi}+\pi x$, դ) $f(x)=6\cdot x^{-\frac{2}{3}}-x^{0,1}$:

255. ա) $f(x)=12\cdot\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$, բ) $f(x)=\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[6]{x^2}$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, դ) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{5}{\sqrt[6]{x}}$:

256. ա) $f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x}$, բ) $f(x)=\dfrac{2x^2-4}{x+1}$:

257. ա) $f(x)=\dfrac{3-4x}{x^2}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$:

258. ա) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x^2}$, բ) $f(x)=\dfrac{5-2x^6}{1-x^3}$:

259. ա) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$:

260. ա) $f(x)=(4x-2)^{12}$, բ) $f(x)=(3-2x)^{15}$,

գ) $f(x)=(2-x)^{-9}$, դ) $f(x)=(x+1)^{-12}$,

ե) $f(x)=\dfrac{4}{(5x-1)^{10}}$, զ) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)^{18}}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (261-262):

261. $f(x)=\dfrac{3-x}{2+x}$, ա) $x_0=0$, բ) $x_0=-3$:

262. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$, ա) $x_0=-2$, բ) $x_0=1$:

➢ **263.** Լուծել $f'(x)=0$ անհավասարումը:

ա) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$,

գ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$, դ) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-3x+4}$:

Կրկնության համար

264. A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց հանդեպ դուրս եկան երկու հետիոտն: Առաջինը B հասավ հանդիպումից 4,5 ժ անց, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից 2 ժ անց: Գտնել հետիոտների արագությունները, եթե A և B քաղաքների միջև հեռավորությունը 30 կմ է:

265. M և N բնակավայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար և հանդիպեցին 30 ր անց: Գտնել յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի արագությունը, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկը M հասավ 25 ր շուտ, քան մյուսը՝ N :

§7. Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները

Արդեն գիտենք աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} :$$

Այս պարագրաֆում կներկայացնենք մնացած տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\sin x)' = \cos x :$$

Կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ այս բանաձևից ստանում ենք՝

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x :$$

Այսպիսով՝

$$(\cos x)' = -\sin x :$$

Կիրառելով քանորդի ածանցման կանոնը՝ ստանում ենք՝

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} :$$

Այսպիսով՝

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} :$$

Համանմանորեն կարող ենք ստանալ $\mathrm{ctg}\, x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} :$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y = 2\,\mathrm{tg}\,x + \sin 2x$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos 2x\,:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը π կետում: Նախ գտնենք $f'(x)$-ը:

$$f'(x) = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot x'}{x^2} = \frac{-3x\sin 3x - \cos 3x}{x^2}\,:$$

Տեղադրելով $x = \pi$, ստանում ենք՝ $f'(\pi) = \pi^{-2}$:

Ցուցչային ֆունկցիաների ածանցյալները տրվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \quad \textit{մասնավորապես՝} \quad (e^x)' = e^x\,,$$

իսկ լոգարիթմական ֆունկցիաներինը՝

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad \textit{մասնավորապես՝} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Օրինակ 3: Գտնենք $y = e^x \cos 3x$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$y' = \left(e^x\right)' \cdot \cos 3x + e^x \cdot (\cos 3x)' =$$
$$= e^x \cdot \cos 3x - e^x \cdot 3\sin 3x = e^x(\cos 3x - 3\sin 3x)\,:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը e կետում:
Նախ ածանցենք ֆունկցիան՝

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}\,:$$

Հետևաբար՝ $f'(e) = 0$:

Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերի ցուցակի լրիվության համար բերենք նաև հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}\,, \qquad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}\,:$$

Երկու ֆունկցիաների գումարի, արտադրյալի, քանորդի և համադրույթի ածանցյալների հաշվման կանոնների և բերված բանաձևերի օգնությամբ կարելի է հաշվել կամայական տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը, որը, ինչպես երևում է այդ բանաձևերից, դարձյալ կլինի տարրական ֆունկցիա:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է $y=\sin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
2. Արտածեք $y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
3. Արտածեք $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
4. Արտածեք $y=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
5. Ինչի՞ է հավասար $y=e^x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Գրեք ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
7. Գրեք բնական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
8. Գրեք լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (266-272):

266. ա) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+2x$, բ) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$,

գ) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}-1}$, դ) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$:

267. ա) $f(x)=\sin x+e^x$, բ) $f(x)=\cos x+\log_7 x$,

գ) $f(x)=5^x+\operatorname{tg} x$, դ) $f(x)=\ln x+\operatorname{ctg} x$,

ե) $f(x)=x^{4,1}+\cos x$, զ) $f(x)=\cos x-e^x+\pi\cdot e$:

268. ա) $f(x)=\sin 4x$, բ) $f(x)=\cos \pi x$,

գ) $f(x)=\operatorname{tg} x+8\pi$, դ) $f(x)=5\operatorname{ctg} x$:

269. ա) $f(x)=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$, բ) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)$,

գ) $f(x)=4\operatorname{tg}(3x-1)$, դ) $f(x)=-6\operatorname{ctg}(4-5x)$:

270. ա) $y=e^{2x}+x-1$, բ) $y=2^{-x}+2e$,

գ) $y=\ln(3x+1)-\lg 2$, դ) $y=\log_5(2-x)-x$:

271. ա) $y=\sin\frac{x}{4}+x\ln x$, բ) $y=\operatorname{tg} 2x+e^{5x}$,

գ) $y=\cos(2x+3)-\log_3 2x$, դ) $y=\operatorname{ctg}(5-x)+4^{-x}$:

272. ա) $f(x)=x\ln x-x$, բ) $f(x)=\log_2(x+1)$,

գ) $f(x)=3^x\ln x+\ln 3$, դ) $f(x)=\ln(e^x+1)$:

➢**273.** Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում:

ա) $f(x)=\left(\frac{20}{\pi}x-3\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$, $x_0=\frac{2}{5}\pi$, բ) $f(x)=\left(\frac{54}{\pi}x-5\right)\cos\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right),\ x_0=-\frac{\pi}{18}$:

գ) $f(x)=2\sin 7x\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$, դ) $f(x)=16\sin\frac{x}{4}\cos x,\ x_0=-\pi$:

➢**274.** ա) $f(x)=e^{2x+3}+2\frac{x+e}{x}-x,\ x_0=-1$,

բ) $f(x)=e^{3x-5}+12\frac{x+e}{x}+x,\ x_0=2$,

Կրկնության համար

* **275.** Իրարից տարբեր a, b, c թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են, իսկ $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$, $\frac{1}{c+1}$ թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել թվաբանական պրոգրեսիայի գումարը:

* **276.** Ապացուցեք, որ եթե $xz^2+x^2z+2y^3=2xyz+y^2x+y^2z$, ապա x, y, z թվերը կամ թվաբանական պրոգրեսիա են կազմում, կամ՝ երկրաչափական:

§8. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 15, *ա*): Այդ գրաֆիկի կամայական երկու կետով անցնող ուղիղն անվանում են ***f* ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող**:

Այսուհետև տրված ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյուն ասելով՝ կհասկանանք այն փոքրագույն ոչ բացասական α անկյունը, որով պետք է O կետի շուրջը պտտել աբսցիսների առանցքը, որպեսզի այն զուգահեռ դառնա կամ համընկնի տրված ուղղին (նկ. 15, *ա*):

Հեշտ է տեսնել, որ $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M(x_0+h, f(x_0+h))$ կետերով անցնող հատողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյան տանգենսը հավասար է x_0 կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությանը (նկ. 15, *ա*).

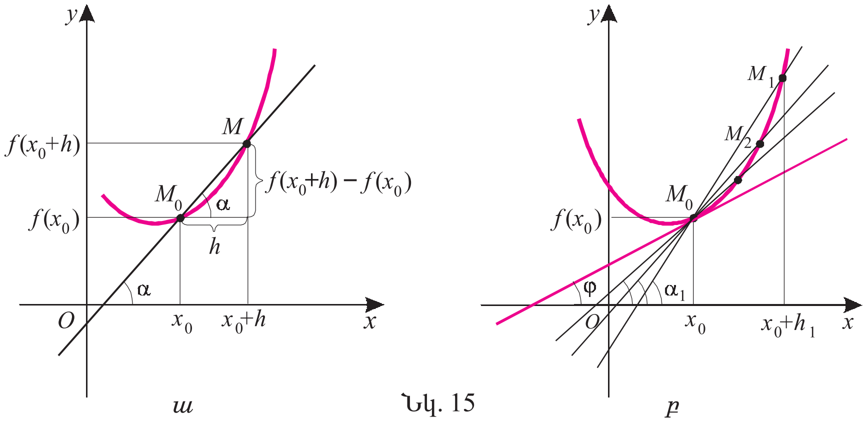
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}:$$

Եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի դեպքում $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M_n(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ կետերով անցնող հատողները n-ն անվերջի ձգտելիս մոտենում են մի սահմանային դիրքի (նկ.15, *բ*), ***ապա այդ սահմանային ուղիղն անվանում են $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:***

Եթե M_oM_n հատողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում են α_n անկյուն, իսկ շոշափողը՝ φ անկյուն (նկ.15, *բ*), ապա n-ը անվերջի ձգտելիս $\alpha_n\to\varphi$: Հետևաբար՝

$\operatorname{tg}\alpha_n \to \operatorname{tg}\varphi$, որտեղից ստանում ենք.

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{tg}\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0):$$



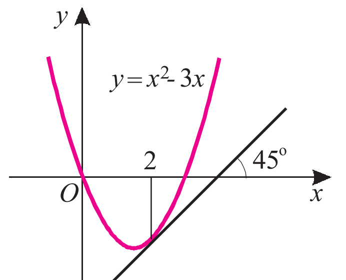
Նկ. 15

Նշանակում է՝ ածանցյալն ունի հետևյալ ***երկրաչափական իմաստը***.

$y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում հավասար է $(x_0, f(x_0))$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած φ անկյան տանգենսին.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi: \qquad (3)$$

Նշենք, որ (3) բանաձևը ճիշտ է այն դեպքում, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին, այսինքն՝ $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$: Հակառակ դեպքում $\operatorname{tg}\varphi$-ն որոշված չէ, իսկ f ֆունկցիան ածանցելի չէ x_0 կետում:



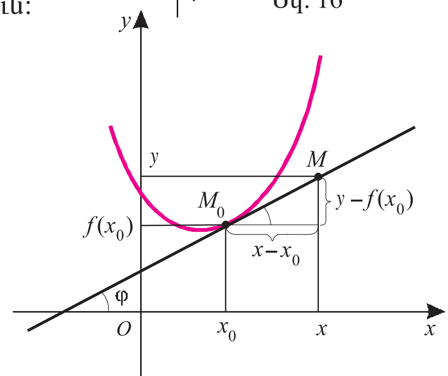
Նկ. 16

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^2-3x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետի աբսցիսը, որով տարված շոշափողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է 45° անկյուն:

Համաձայն (3) բանաձևի՝ պետք է գտնենք այն x կետը, որի դեպքում $f'(x)=\operatorname{tg}45^\circ$: Քանի որ $f'(x)=2x-3$, իսկ $\operatorname{tg}45^\circ=1$, ուրեմն (նկ.16)՝

$$2x-3=1 \Rightarrow x=2:$$

Պատասխան՝ 2:



Նկ. 17

Այժմ գտնենք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին (նկ.17): Ինչպես երևում է գծագրից,

$M(x, y)$ կետը պատկանում է շոշափողին, եթե

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0):$$

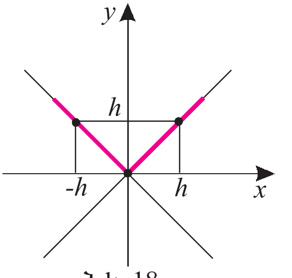
Այստեղից ստանում ենք՝ $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$: Այսպիսով՝

$(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումն է՝

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0):$$

Օրինակ 2: Հիմնավորենք, որ $f(x) = |x|$ ֆունկցիան $x_0 = 0$ կետում ածանցելի չէ:

Նկատենք, որ եթե $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող կառուցենք $(0; 0)$ և $(h; |h|)$ կետերով (նկ. 18), ապա դրական h-երի դեպքում կունենանք $y = x$ ուղիղը, իսկ բացասական h-երի դեպքում՝ $y = -x$ ուղիղը: Ուստի՝ այդ հատողները որոշակի սահմանային դիրք ունենալ չեն կարող: Այսինքն՝ $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(0; 0)$ կետում շոշափող չունի:



Նկ. 18

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x) = x^2 e^x + 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0 = -2$ աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը:

Նախ՝ $f(x_0) = f(-2) = 4e^{-2} - 4$ և

$$f'(x) = (x^2)'e^x + x^2 e^x + 2 = e^x(2x + x^2) + 2:$$

Հետևաբար՝ $f'(x_0) = f'(-2) = 2$, և որոնելի շոշափողի հավասարումն է՝ $y = 2(x+2) + 4e^{-2} - 4$ կամ, որ նույնն է, $y = 2x + 4e^{-2}$:

Պատասխան՝ $y = 2x + 4e^{-2}$:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ $f(x) = x\cos x + 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0 = 0$ աբսցիսն ունեցող կետով տարված շոշափողը զուգահեռ է $y = x - 3$ ուղղին:

Հաշվենք ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները $x_0 = 0$ կետում.

$$f(0) = 2, \quad f'(x) = \cos x - x\sin x, \quad f'(0) = 1:$$

Նշված շոշափողի հավասարումը կլինի՝ $y = x + 2$: Քանի որ այդ շոշափողը և $y = x - 3$ ուղիղն ունեն միևնույն անկյունային գործակիցը, իսկ ազատ անդամները տարբեր են, ուրեմն՝ դրանք զուգահեռ են:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող:
2. Ո՞րն է ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը:

3. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:

4. Ո՞րն է ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:

5. Ինչի՞ է հավասար $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը, եթե շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին:

6. Գրեք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը:

Առաջադրանքներ

277. Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $f(x) = \dfrac{x^2}{6}$, $x_0 = \sqrt{3}$, բ) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 0$,

գ) $f(x) = \sin x + x$, $x_0 = 2{,}5\pi$, դ) $f(x) = x^3 - 2x^2 - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$,

ե) $f(x) = \ln 3x + x$, $x_0 = 2$, զ) $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $x_0 = 0$:

278. Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցով գրաֆիկին տարած շոշափողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն.

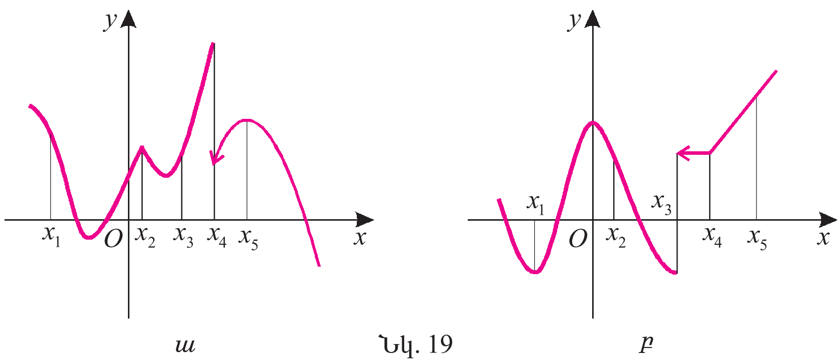
ա) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 23x + \ln 5$, $\varphi = 45^\circ$,

բ) $f(x) = \sin x \cdot \cos x - 2x + 11$, $\varphi = 135^\circ$,

գ) $f(x) = \sin 2x$, $\varphi = 60^\circ$, դ) $f(x) = \sin^2 x + x$, $\varphi = 45^\circ$:

➤**279.** 19-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաների համար պարզեք, թե նշված x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 կետերից որում՝

1) ֆունկցիան անընդհատ չէ,



ա Նկ. 19 բ

2) ֆունկցիան ածանցյալ չունի,

3) ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է,

4) ֆունկցիայի ածանցյալը դրական է,

5) ֆունկցիայի ածանցյալը բացասական է:

Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը (280-281):

280. ա) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=2$, բ) $f(x)=x^3-1$, $x_0=-1$,

գ) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$, $x_0=1$, դ) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$, $x_0=-1$,

ե) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$, $x_0=0$, զ) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=1$:

281. ա) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, բ) $f(x)=3\sin x+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$,

գ) $f(x)=x^2e^x$, $x_0=1$, դ) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=-1$:

➤**282.** Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցով տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին:

ա) $f(x)=x^3+6x+2$, $y=6x$, բ) $f(x)=3x^4-2x$, $y=2(1-x)$:

➤**283.** Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը.

ա) $f(x)=3x-2x^2$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$,

գ) $f(x)=e^{2x+2}+x$, $x_0=-1$, դ) $f(x)=\log_7 x$, $x_0=7$:

Կրկնության համար

284. Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

ա) $f(x)=2x^2-4x+7$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+20}$,

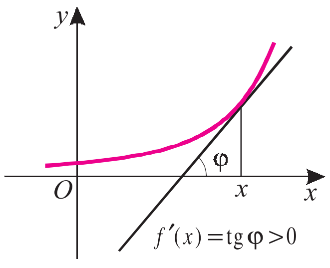
գ) $f(x)=-3x^2+12x-5$, ➤դ) $f(x)=\dfrac{1}{20x-4x^2-9}$:

§9. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր

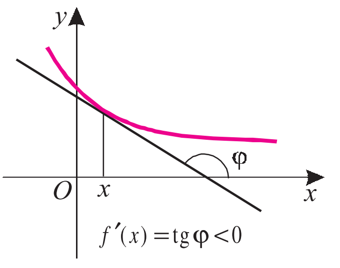
Գիտենք, որ ածանցյալն ունի այսպիսի ֆիզիկական իմաստ. եթե կոորդինատային առանցքով շարժվող նյութական կետը ժամանակի t պահին $s(t)$ կետում է, ապա t պահին նրա արագությունը $s'(t)$ է: Պարզ է, որ եթե կետի արագությունը դրական է, ապա կետը շարժվում է դեպի աջ, և $s(t)$-ն աճող է, իսկ եթե կետի արագությունը բացասական է, ապա կետը շարժվում է դեպի ձախ, և $s(t)$-ն նվազող է: Այս պնդումն ունի խիստ մաթեմատիկական ձևակերպում և ապացույց: Այստեղ այն կբերենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 1 (ֆունկցիայի աճման բավարար պայման)**:** ***Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)>0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է*** (նկ. 20, *ա*)**:**

Թեորեմ 2 (ֆունկցիայի նվազման բավարար պայման)**:** ***Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)<0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան նվազող է*** (նկ. 20, *բ*)**:**



ա



բ

Նկ. 20

Այսպիսով՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել հետևյալ հաշվեկանոնով.

1. գտնել $f'(x)$-ը և նշել $D(f)$-ի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի,

2. գտնել $f'(x)=0$ հավասարման արմատները,

3. նախորդ երկու քայլերում գտնված կետերի միջոցով ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել միջակայքերի,

4. այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում որոշել ածանցյալի նշանը:

Այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)>0$, ֆունկցիան աճող է, իսկ այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)<0$, ֆունկցիան նվազող է:

Ինչպես տեսանք, ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը գտնելիս կարևոր դեր են խաղում հաշվեկանոնի առաջին երկու քայլերում գտնված կետերը, այսինքն՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը կա՛մ գոյություն չունի, կա՛մ 0 է: Այդպիսի կետերն ունեն հատուկ անվանում:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետն անվանում են կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է, կամ գոյություն չունի:

Այժմ վերը բերված հաշվեկանոնի առաջին երկու կետերը կարող ենք փոխարինել մեկով՝ ***գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:***

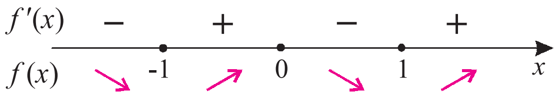
Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^4-2x^2$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Օգտվենք վերը բերված հաշվեկանոնից:

1. $f'(x)=4x^3-4x$, $x\in \mathrm{R}$,

2. $4x^3-4x=0$ հավասարման արմատներն են -1; 0 և 1 թվերը,

3. $(-1; 0)$ և $(1; +\infty)$ միջակայքերում $f'(x)=4x^3-4x>0$, իսկ $(-\infty; -1)$ և $(0; 1)$ միջակայքերում՝ $4x^3-4x<0$:



Նկ. 21

Հետևաբար՝ ֆունկցիան աճող է $(-1; 0)$ և $(1; +\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $(-\infty; -1)$ և $(0; 1)$ միջակայքերում: 21-րդ նկարում պատկերված է թվային առանցքը՝ տրոհված -1; 0 և 1 կետերով: Առանցքից վեր նշված են համապատասխան միջակայքերում ֆունկցիայի ածանցյալի նշանները, իսկ առանցքից ցած՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթը՝ ↗ - աճող, ↘ - նվազող:

Հաշվի առնելով, որ $-1; 0; 1$ կետերը պատկանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ստանում ենք պատասխանը.

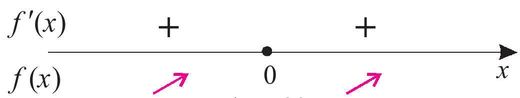
ֆունկցիան աճող է $[-1; 0]$ և $[1; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում,

ֆունկցիան նվազող է $(-\infty; -1]$ և $[0; 1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Ուշադրություն դարձնենք այն բանին, որ ֆունկցիան աճող է $[-1; 0]$ և $[1; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում առանձին, այլ ոչ թե նրանց միավորման վրա: Իրոք, $-0{,}5<1$, սակայն $f(-0{,}5)=-0{,}4375>-1=f(1)$:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=x^5+2x^3-1$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x)=5x^4+6x^2$, $x\in R$: Հետևաբար՝ $f'(0)=0$, իսկ $(-\infty; 0)$ և $(0; +\infty)$ միջակայքերում՝ $f'(x)>0$ (նկ. 22):



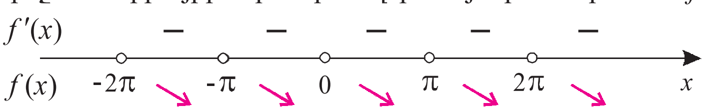
Նկ. 22

Հաշվի առնելով, որ $0\in D(f)$, եզրակացնում ենք, որ f -ն աճող է $(-\infty; 0]$ և $[0; +\infty)$ միջակայքերում: Քանի որ այդ միջակայքերն ունեն ընդհանուր կետ, ֆունկցիան աճող է նաև նրանց միավորման վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան աճող է $(-\infty; \infty)$-ում:

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=\mathrm{ctg}x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ $x\neq \pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, և $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\in D(f)$: Ուստի՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող կամայական x կետում՝ $f'(x)<0$ (նկ. 23):



Նկ. 23

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(\pi k;\ \pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:
2. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի աճման բավարար պայմանը:
3. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի նվազման բավարար պայմանը:
4. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:
5. Մոնոտո՞ն է արդյոք $\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիան՝ ա) $(\pi k;\ \pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում, բ) իր որոշման տիրույթում:

Առաջադրանքներ

Գտեք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (285-286):

285. ա) $f(x)=2x^2-3x+1$, բ) $f(x)=2+3x-x^2$,
գ) $f(x)=3x^4-4x^3+5$, դ) $f(x)=x^4-4x^3+2$,
ե) $f(x)=\dfrac{2x^3}{1-3x^2}$, զ) $f(x)=\dfrac{3x-4}{1+x^2}$:

286. ա) $f(x)=4\sin x-17$, բ) $f(x)=1+2\cos x$,
գ) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, դ) $f(x)=\sin^2 x$,
ե) $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$, զ) $f(x)=3x^2-2x\cos x+2\sin x$:

Գտեք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (287-290):

287. ա) $f(x)=4-5x$, բ) $f(x)=\dfrac{x}{2}-1$,
գ) $f(x)=x^2-8x+5$, դ) $f(x)=4+6x-x^2$:

288. ա) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, բ) $f(x)=\dfrac{2}{x}+8x$,
գ) $f(x)=\dfrac{x-5}{x+4}$, դ) $f(x)=\dfrac{1-2x}{2x+7}$:

289. ա) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$, բ) $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-7$,
գ) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$, դ) $f(x)=x^4-18x^2-9$:

➤**290.** ա) $f(x)=e^x(x^2-24x)$, բ) $f(x)=e^x(2x^2-30)$,
գ) $f(x)=e^x(x^2-8x)$, դ) $f(x)=e^x(x^2-3x)$:

Գծեք որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը բավարարում է նշված պայմանները (291-292):

➤**291.** $D(f)=[-2;4]$, $f'(x)>0$, երբ $x\in(-2;0)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(0;4)$:

➤**292.** $D(f)=[-3;3]$, $f'(x)<0$, երբ $x\in(-3;1)$ և $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;3)$:

293. Ապացուցեք ֆունկցիայի մոնոտոնությունը:

ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\cos 2x-2x$,

գ) $f(x)=2x^3-3x^2+12x-8$, դ) $f(x)=5-12x+3x^2-x^3$:

Կրկնության համար

294. Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

ա) $f(x)=4x-x^2+3$, բ) $f(x)=2x^2-6x+9$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$, դ) $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-4x+6}$:

§10. Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը

Նախորդ պարագրաֆում ուսումնասիրեցինք ֆունկցիայի մոնոտոնության և ածանցյալի կապը: Այս պարագրաֆում ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով կհետազոտենք նրա էքստրեմումները:

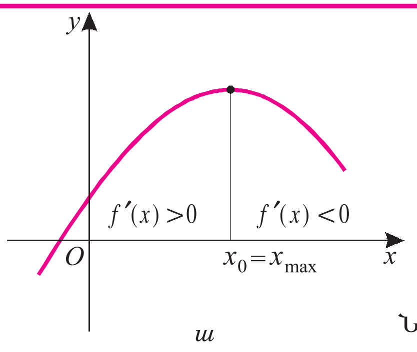
Ինչպես գիտենք, եթե ֆունկցիան աճող է $(a;x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ $[x_0;b)$-ում, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ եթե $(a;x_0)$ միջակայքում $f'(x)>0$, ապա f-ն $(a;x_0]$ միջակայքում աճող է: Եթե նաև $f'(x)<0$, երբ $x\in(x_0;b)$, ապա f-ը կլինի նվազող $[x_0;b)$-ում, և հետևաբար՝ x_0-ն կլինի f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ (նկ. 24, *ա*): Այսպիսով՝ հանգեցինք հետևյալ թեորեմին:

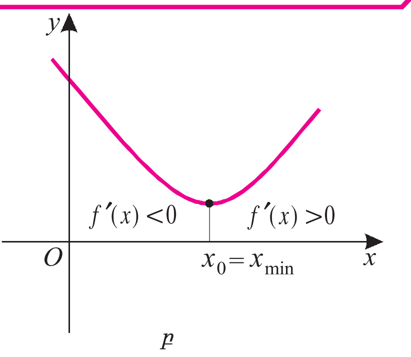
Թեորեմ 1 (ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշ): ***Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և՝***

1. $f'(x)>0$, երբ $x\in(a;x_0)$,

2. $f'(x)<0$, երբ $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝ $x_0=x_{\max}$:





Նկ. 24

Հանգունորեն կարելի է համոզվել, որ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը (նկ. 24, *բ*):

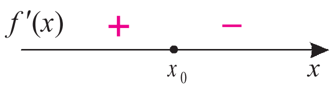
Թեորեմ 2 (ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշ)**: *Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և՝***

1. $f'(x)<0$, ***երբ*** $x\in(a;x_0)$,
2. $f'(x)>0$, ***երբ*** $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է՝ $x_0=x_{\min}$:

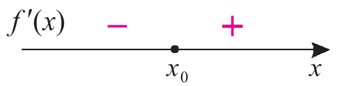
Այս երկու թեորեմները պարզեցված ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

Եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի (նկ. 25, *ա*), ***ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի*** (նկ. 25, *բ*), ***ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:***



$x_{\max}=x_0$

ա



$x_{\min}=x_0$

բ

Նկ. 25

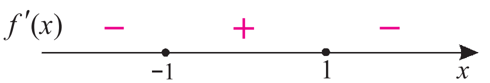
Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը:

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և կամայական x-ի համար՝

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}:$$

Ուստի՝ $f'(x)=0$, երբ $x=\pm1$, ընդ որում, $f'(x)>0$, եթե $x\in(-1;1)$, և $f'(x)<0$, եթե $x\in(-\infty;-1)$ կամ $x\in(1;+\infty)$ (նկ. 26):

Հետևաբար՝ $x_{\min}=-1$ և $x_{\max}=1$:



$x_{\min}=-1$ $x_{\max}=1$

Նկ. 26

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Այս ֆունկցիան անընդհատ է, $f'(x)=-1<0$, երբ $x\in(-\infty;0)$ և $f'(x)=1>0$, երբ $x\in(0;+\infty)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան մաքսիմումի կետ չունի, և $x_{\min}=0$:

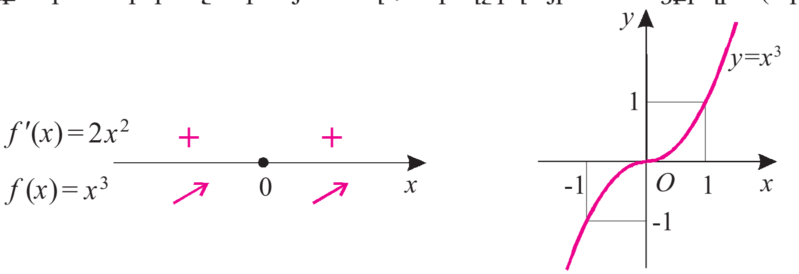
Նկատենք, որ առաջին օրինակում դիտարկված ֆունկցիայի ածանցյալն էքստրեմումի կետերում զրո է, իսկ երկրորդ օրինակում դիտարկված ֆունկցիան էքստրեմումի կետում ածանցյալ չունի: Պարզվում է, որ սա ընդհանուր փաստ է և, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեմը, յուրաքանչյուր ֆունկցիայի ածանցյալը էքստրեմումի կետում կա՛մ 0 է, կա՛մ գոյություն չունի:

***Ֆերմայի թեորեմ:* Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, և այդ կետում f-ն ածանցելի է, ապա $f'(x_0)=0$:**

Փաստորեն, համաձայն Ֆերմայի թեորեմի, ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել նրա կրիտիկական կետերի բազմության մեջ: Այսինքն՝

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը կրիտիկական կետեր են:

Սակայն չպետք է կարծել, որ յուրաքանչյուր կրիտիկական կետ անպայման էքստրեմումի կետ է: Օրինակ՝ $f(x)=x^3$ ֆունկցիայի համար, որի ածանցյալն է՝ $f'(x)=3x^2$, ունենք՝ $f'(0)=0$, և $f'(x)>0$, եթե $x\neq 0$ (նկ. 27, *ա*): Այսինքն՝ 0-ն այդ ֆունկցիայի համար կրիտիկական կետ է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ: $f(x)=x^3$ ֆունկցիան ընդհանրապես էքստրեմումի կետ չունի. այն աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա (նկ. 27, *բ*):



ա Նկ. 27 *բ*

Այսպիսով՝ ածանցյալի միջոցով ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

1. ***ֆունկցիան ածանցել,***
2. ***գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,***
3. ***եթե կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ անցնելիս՝***

   ա) ***ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասական*** (նկ. 25, *ա*)***, ապա այդ կետը մաքսիմումի կետ է,***

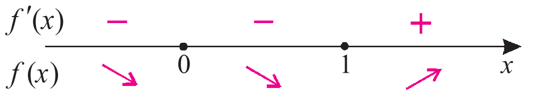
   բ) ***ածանցյալը փոխվում է բացասականից դրական*** (նկ. 25, *բ*)***, ապա այդ կետը մինիմումի կետ է,***

   գ) ***ածանցյալը պահպանում է նշանը, ապա այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ*** (նկ. 27)***:***

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=3x^4-4x^3+25$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, կրիտիկական կետերը և էքստրեմումի կետերը:

Նախ՝ $D(f)=\mathbf{R}$ և $f'(x)=12x^3-12x^2$, $x\in\mathbf{R}$: Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝ $x=0$ և $x=1$:

Այնուհետև պարզում ենք, որ $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;+\infty)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ (նկ. 28): Կրիտիկական կետերից 0-ն էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ այդ կետի վրայով անցնելիս ածանցյալը չի փոխում նշանը: Ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;1]$ և աճող՝ $[1;+\infty)$ միջակայքերում, իսկ 1-ը մինիմումի կետ է:



$x_{\min}=1$

Նկ. 28

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;1]$-ում, աճող՝ $[1;+\infty)$-ում, $x_{\min}=1$, կրիտիկական կետերն են՝ $0;1$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշը:
2. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշը:
3. Ձևակերպեք ֆունկցիայի էքստրեմումի պարզեցված հայտանիշը:
4. Ձևակերպեք Ֆերմայի թեորեմը:
5. Արդյո՞ք յուրաքանչյուր կրիտիկական կետ էքստրեմումի կետ է:
6. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Առաջադրանքներ

295. Գտեք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:

ա) $f(x)=x^4+4x^3+8x^2+6$, բ) $f(x)=x^3-3x^4-5$,

գ) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$, դ) $f(x)=2\cos x-x$:

Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (296-297):

296. ա) $f(x)=3x^2-6x-5$, բ) $f(x)=6-8x-x^2$,

գ) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$, դ) $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2$:

297. ա) $f(x)=3x^5-5x^3+3$, բ) $f(x)=3x^5-5x^3-30x$,

գ) $f(x)=e^x\left(24-x^2\right)$, դ) $f(x)=e^x\left(x^2-3\right)$:

298. Գտեք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և էքստրեմումները:

ա) $f(x)=\dfrac{3x+6}{x^2+5}$, բ) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+12}$,

գ) $f(x)=\dfrac{3}{x^4+3x^2+17}$, դ) $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+5x^2+3}$:

***299.** Գտեք a և b թվերն այնպես, որ x_1-ը և x_2-ը լինեն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր:

ա) $f(x)=x^3+ax^2+bx+5,\quad x_1=-2,\quad x_2=4$,

բ) $f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x+\dfrac{3}{4}\operatorname{tg}4x,\quad x_1=\dfrac{\pi}{6},\quad x_2=\dfrac{\pi}{3}$:

Կրկնության համար

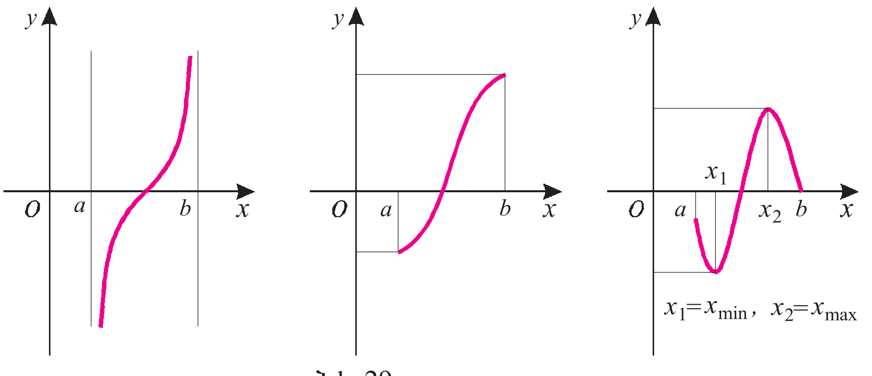
Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝ նշված միջակայքում (300-301).

300. ա) $f(x)=x^2-2x-1,\ [2;3]$, բ) $f(x)=x-2x^2+3,\ [1;3]$:

301. ա) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+1},\ [0;2]$, բ) $f(x)=\dfrac{4-x}{x+4},\ [-1;1]$:

§11. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

Կիրառական նշանակություն ունեցող շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում գտնել որևէ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը՝ տրված միջակայքում: Հնարավոր է երեք դեպք:



ա Նկ. 29 *բ* *գ*

1. Ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեք չունի (նկ. 29, *ա*):

2. Ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ծայրակետում (նկ. 29, *բ*):

3. Ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում (նկ. 29, *գ*):

Պարզ է, որ վերջին դեպքում այդ կետը նաև էքստրեմումի կետ է:

Վերը ասվածից կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը:

Եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք, ապա այդ արժեքը պետք է փնտրել միջակայքի ծայրակետերում և էքստրեմումի կետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության մեջ:

Ինչպես նշեցինք, ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք կարող է չունենալ: Այդպիսին է, օրինակ, 29-րդ *ա* նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիան: Սակայն նկատենք, որ այդ ֆունկցիան անընդհատ չէ $[a; b]$ միջակայքի ծայրակետերում: Պարզվում է, որ.

Եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում, ապա այն ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Այս պնդումը Վայերշտրասի թեորեմն է, որը կընդունենք առանց ապացուցման:

Կիրառական խնդիրներում հանդիպող ֆունկցիաները, որպես կանոն, միջակայքում ունենում են վերջավոր թվով էքստրեմումներ: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ էքստրեմումի կետերը պետք է փնտրել կրիտիկական կետերի բազմության մեջ:

Ամփոփելով ասվածը՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ հաշվեկանոնը:

$[a;b]$ միջակայքում անընդհատ f ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

1. ***գտնել f ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,***
2. ***այդ կետերից ընտրել այն $x_1, x_2, \ldots, x_k$ կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ միջակայքին,***
3. ***հաշվել $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots, f(x_k)$ արժեքները,***
4. ***ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն, իսկ ամենափոքրը՝ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը:***

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^3-9x^2+24x-5$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[0; 3]$ միջակայքում:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=3x^2-18x+24:$$

Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x_1=2$ և $x_2=4$, որոնցից միայն առաջինն է պատկանում $[0; 3]$ միջակայքին (ուստի՝ $f(4)$-ը պետք չէ հաշվել): Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները $x=2$ կրիտիկական կետում ու միջակայքի 0 և 3 ծայրակետերում՝ ստանում ենք՝

$$f(0)=-5,\ f(2)=15,\ f(3)=13:$$

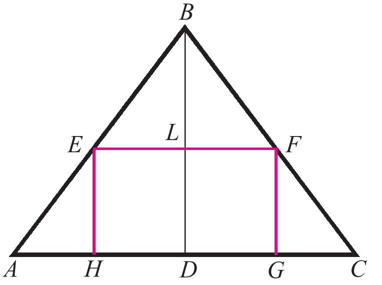
Այսպիսով՝ $[0; 3]$ միջակայքում f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 15 է, իսկ փոքրագույնը՝ -5: Ընդ որում, ֆունկցիան մեծագույն արժեքն ընդունում է 2 կետում, իսկ փոքրագույնը՝ 0 կետում: Ասվածը համառոտ գրվում է այսպես.

$$\max_{[0;\,3]} f(x)=f(2)=15 \text{ և } \min_{[0;\,3]} f(x)=f(0)=-5:$$

Օրինակ 2: Հավասարասրուն եռանկյանը, որի հիմքը 6 է, իսկ սրունքը՝ 5, ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները եռանկյան հիմքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը՝ սրունքների (նկ. 30): Ինչպիսի՞ մեծագույն մակերես կարող է ունենալ այդպիսի ուղդանկյունը:

Այս խնդիրը լուծելու համար նախ փորձենք այն ներկայացնել ֆունկցիաների լեզվով:

Տանենք ABC եռանկյան BD բարձրությունը: Դժվար չէ հաշվել, որ $BD=4$: Ներգծած $EFGH$ ուղղանկյան EF կողմի երկարությունը նշանակենք x: Պարզ է, որ $0<x<6$: Քանի որ $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, իսկ BD-ն և BL-ը համապատասխան բարձրություններ են, ուստի $\frac{BL}{BD}=\frac{EF}{AC}$: Հաշվի առնելով, որ $BL=BD-LD=BD-FG$, ստանում ենք՝



Նկ. 30

$$\frac{4-FG}{4}=\frac{x}{6}, \text{ որտեղից՝ } FG=\frac{12-2x}{3}:$$

Հետևաբար՝ $EFGH$ ուղղանկյան մակերեսը կլինի $\frac{x(12-2x)}{3}$:

Նշանակում է՝ պետք է գտնենք $f(x)=\frac{x(12-2x)}{3}$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $(0;\ 6)$ միջակայքում: Լուծելով

$$f'(x)=\frac{12-4x}{3}=0$$

հավասարումը, ստանում ենք $x=3$ միակ կրիտիկական կետը, ընդ որում, $f(3)=6$, իսկ $f(0)=f(6)=0$: Հետևաբար՝ $[0;6]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 6 է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x=3$ կետում: Քանի որ այդ կետը պատկանում է $(0;6)$ միջակայքին, ուրեմն $f(3)=6$ արժեքը մեծագույնն է նաև $(0;\ 6)$ միջակայքում:

Պատասխան՝ 6:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Կարո՞ղ է ֆունկցիան միջակայքում չունենալ մեծագույն (փոքրագույն) արժեք:
2. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունել այդ միջակայքի ծայրակետում:
3. Եթե ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում, ապա ինչպիսի՞ կետ է այդ կետը:
4. Ֆունկցիայի ո՞ր արժեքների մեջ պետք է փնտրել նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:
5. Ձևակերպեք Վայերշտրասի թեորեմը:
6. Ձևակերպեք $[a;b]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու հաշվեկանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտեք նշված միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (302-308):

302. ա) $f(x)=4x-x^2+1$, $[1;3]$, բ) $f(x)=x^2+3x-2$, $[-3;0]$,

գ) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $[-1;1]$, դ) $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $[0;2]$:

303. ա) $f(x)=4x-1$, $[-2;0]$, բ) $f(x)=9-5x$, $[-1;1]$,

գ) $f(x)=x^3-3x$, $[2;5]$, դ) $f(x)=x^4-8x^3$, $[0;5]$:

304. ա) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, $[1;3]$, բ) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$, $[-1;2]$,

գ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+8}$, $[-2;1]$, դ) $f(x)=3+2x+\dfrac{27}{x^2}$, $[1;5]$:

➤**305.** ա) $f(x)=xe^{-2x-8}+1$, $[-4;0]$, բ) $f(x)=5+xe^{-3x-9}$, $[-3;0]$,

գ) $f(x)=-xe^{4x-8}$, $[0;2]$, դ) $f(x)=2-xe^{3x-9}$, $[0;3]$:

➤**306.** ա) $f(x)=(5x-4)^{12}+60x$, $[0;0{,}8]$, բ) $f(x)=(2x+3)^{14}-28x$, $[-1{,}5;0]$:

307. ա) $f(x)=2\sin^2 x-2\sin x-1$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

բ) $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-5$, $[0;\pi]$:

➤**308.** ա) $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $[-\pi;\pi]$, բ) $f(x)=(e^x-1)\sin x+\cos x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$:

309. 14 -ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

310. 20 -ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

➤**311.** Ինչպիսի՞ք պետք է լինեն S մակերես ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի այն ունենա՝ ա) փոքրագույն պարագիծ, բ) փոքրագույն անկյունագիծ:

➤**312.** Գտեք R շառավղով շրջանին ներգծած այն ուղղանկյան չափերը, որն ունի՝ ա) ամենամեծ մակերեսը, բ) ամենամեծ պարագիծը:

➤**313.** Գտեք $2p$ պարագիծ ունեցող այն հավասարասրուն եռանկյան սրունքը, որն ունի ամենամեծ մակերեսը:

➤**314.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինի P պարագիծ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի նրա ներքնաձիգը լինի ամենափոքրը:

Կրկնության համար

315. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ և որո՞նք՝ կենտ:

ա) $x^3+\sin 3x$, բ) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$, գ) $x^6-3x^3+\sin x$, դ) $\left(x^2+1\right)\sin^2 x$, ե) $\cos x + x^6 - |x|$, զ) $\dfrac{x^3-1}{\sin x}$:

316. Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

ա) $\cos x \cdot \sin x$, բ) $\sin^2 x - \cos^2 x$, ➤գ) $\dfrac{\sin 4x}{\sin^2 2x + \sin 2x}$:

§12. Ֆունկցիայի հետազոտումն ածանցյալի միջոցով

Նախորդ պարագրաֆներում տեսանք, որ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ հեշտությամբ բացահայտվում են ածանցյալի օգնությամբ, ուստի ածանցյալի կիրառումը հեշտացնում է նաև ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը:

Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը հիմնականում բաղկացած է հետևյալ քայլերից:

1) ***Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:***

2) ***Պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՞ ոչ:***

3) ***Պարզել ֆունկցիայի զույգությունը:***

4) ***Որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը:***

5) ***Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:***

6) ***Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:***

7) ***Հաշվել ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում:***

8) ***Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, ապա պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:***

Այս քայլերից 6-րդը կատարելիս արդյունավետ է ածանցյալի կիրառումը: Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելով՝ հեշտությամբ կարող ենք գտնել մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:

Օրինակ 1: Հետազոտենք $f(x)=x^4-5x^2+4$ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը:

1) Ակնհայտ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$:

2) Ֆունկցիան պարբերական չէ:

3) Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x)=(-x)^4-5(-x)^2+4=x^4-5x^2+4=f(x):$$

4) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը $(0;\,4)$ կետում: Լուծելով $x^4-5x^2+4=0$ երկքառակուսային հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի զրոները՝ $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$ և $x_4=2$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերն են՝ $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$:

5) Քանի որ f-ը բազմանդամ է, ուրեմն այն անընդհատ է, և նրա զրոներով թվային

առանցքը տրոհվում է նշանապահպանման միջակայքերի՝ $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$ և $(2;+\infty)$: Դժվար չէ ստուգել, որ $(-2;-1)$ և $(1;2)$ միջակայքերում ֆունկցիան բացասական է, իսկ մյուսներում՝ դրական:

6) Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x)=4x^3-10x$:

Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x=\pm\sqrt{2,5}$ և $x=0$: Որոշելով ածանցյալի նշանները համապատասխան միջակայքերում՝ գտնում ենք, որ ֆունկցիան աճում է $\left[-\sqrt{2,5};0\right]$, $\left[\sqrt{2,5};+\infty\right)$ միջակայքերում և նվազում՝ $\left(-\infty;-\sqrt{2,5}\right]$, $\left[0;\sqrt{2,5}\right]$ միջակայքերում: Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերն են՝

$$x_{\min}=-\sqrt{2,5},\ x_{\max}=0,\ x_{\min}=\sqrt{2,5}:$$

7) Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում՝ ստանում ենք՝

$$f\left(-\sqrt{2,5}\right)=f\left(\sqrt{2,5}\right)=-2,25 \text{ և } f(0)=4:$$

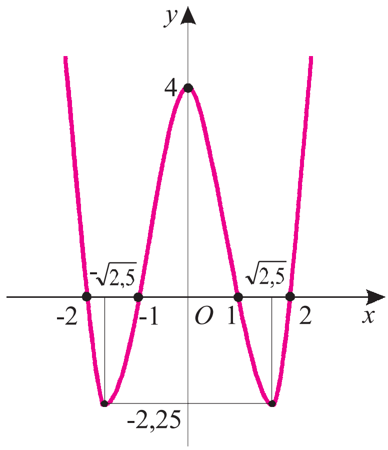
Ասվածը հարմար է գրել աղյուսակի տեսքով:

x	$\left(-\infty;\sqrt{2,5}\right)$	$-\sqrt{2,5}$	$\left(-\sqrt{2,5};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{2,5}\right)$	$\sqrt{2,5}$	$\left(\sqrt{2,5};\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$
		min		max		min	

Ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է և մինիմումի կետերում ընդունում է նաև փոքրագույն արժեքը: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ և մեծագույն արժեք չունի:

8) Երբ x-ը ձգտում է $+\infty$-ի կամ $-\infty$-ի, ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են $+\infty$-ի:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ կոորդինատային հարթության վրա նշենք $(0;4)$, $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$ կետերը, որտեղ գրաֆիկը հատում է կոորդինատային առանցքները: Այնուհետև նշենք $\left(-\sqrt{2,5};-2,25\right)$ և $\left(\sqrt{2,5};-2,25\right)$ կետերը, որոնք համապատասխա-նում են ֆունկցիայի էքստրեմումներին (նկ. 31): Եվ վերջապես, հաշվի առնելով ֆունկցիայի վարքը մոնոտոնության միջակայքերում և x-ը $\pm\infty$-ի ձգտելիս, կառուցում ենք ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը (նկ. 31):



Նկ. 31

Օրինակ 2: Կառուցենք $f(x)=\dfrac{8(x+1)}{x^2+8}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Պարզ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$:

Ֆունկցիան ունի միակ զրո՝ $x=-1$, իսկ $f(0)=1$: Այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատների առանցքները $(-1;0)$ և $(0;1)$ կետերում:

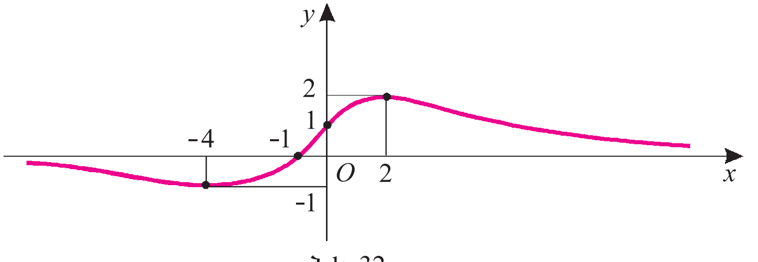
Ֆունկցիան բացասական է $(-\infty;-1)$ միջակայքում և դրական՝ $(-1;\infty)$ միջակայքում: Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=-\frac{8(x^2+2x-8)}{(x^2+8)^2},\quad x\in\mathbf{R}:$$

Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը $x^2+2x-8=0$ հավասարման արմատներն են՝ $x_1=-4,\ x_2=2$:

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘
		min		max	

Լրացնելով աղյուսակը և հաշվի առնելով վերը բերված հատկությունները՝ դժվար չէ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 32):



Նկ. 32

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ֆունկցիայի ո՞ր հատկություններն ուսումնասիրելիս է կիրառվում ածանցյալը:
2. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:

Առաջադրանքներ

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը (317-322).

317. ա) $f(x)=x^2+8x-9$, բ) $f(x)=x^2+2x+6$, գ) $f(x)=2-4x-x^2$, դ) $f(x)=-x^2+4x-8$:

318. ա) $f(x)=-2x^3+6x+1$, բ) $f(x)=x^3+3x+2$,

գ) $f(x)=x^4-2x^2-3$, դ) $f(x)=x^4-16x^2$:

➤**319.** ա) $f(x)=e^x(x-1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x+2)$:

➤**320.** ա) $f(x)=e^x(x^2-2x+1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x^2+6x+9)$:

➤**321.** ա) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, բ) $f(x)=x\sqrt{3-x}$,

գ) $f(x)=\sqrt{5-x^2+4x}$, դ) $f(x)=x\sqrt{x+5}$:

➤**322.** ա) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, բ) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

գ) $f(x)=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$, դ) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$:

Կրկնության համար

➤**323.** A և B վայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու հետիոտն և հանդիպեցին 5 ժ անց: Հանդիպումից հետո առաջինի արագությունը, որն A-ից գնում էր B, 1 կմ/ժ-ով մեծացավ: Հայտնի է, որ առաջին հետիոտնը B հասավ 50 ր շուտ, քան երկրորդը կհասներ A: Որոշեք առաջին հետիոտնի սկզբնական արագությունը:

➤**324.** A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու ավտոմեքենա ու հանդիպեցին 5 ժ անց: A-ից մեկնած ավտոմեքենայի արագությունը 10 կմ/ժ-ով փոքր է մյուս մեքենայի արագությունից: Եթե առաջին մեքենան A-ից մեկներ երկրորդից 4,5 ժ շուտ, ապա կհանդիպեին B-ից 150 կմ հեռավորությամբ: Գտեք A և B քաղաքների միջև եղած հեռավորությունը:

Առաջադրանքներ կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (325-331):

325. ա) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$, բ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$,

գ) $5^{x+7}=(0{,}2)^{x+3}$, դ) $2^{3x-1}=(0{,}25)^{4x+6}$:

326. ա) $2^{x+3}+2^{x+1}=80$, բ) $5^{x+1}+5^{x-1}-5^{x}=105$:

327. ա) $5^{x+1}+3^{2x+3}=5^{x+2}-9\cdot 3^{2x}$, բ) $3^{3x}+9\cdot 2^{2x}=4^{x}+3^{2+3x}$:

328. ա) $4^{x}-3\cdot 2^{x+2}=64$, բ) $81^{x}+3^{3+2x}=90$:

➤**329.** ա) $18\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-35\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+12=0$, բ) $4^{\sqrt{x-3}}-\frac{9}{4}\cdot 2^{\sqrt{x-3}}+\frac{1}{2}=0$:

➤**330.** ա) $5^{x}-5^{3-x}=20$, բ) $3^{x+3}-3^{-x-1}-8=0$:

331. ա) $4^{x}+10^{x}-2\cdot 25^{x}=0$, բ) $7^{2x+1}+4\cdot 21^{x}-3^{2x+1}=0$:

Լուծեք անհավասարումը (332-337):

332. ա) $3^{x^2-2x}<27$, բ) $5^{x^2-2x-2}>5^{2x+3}$:

333. ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x-3}\le\frac{8}{27}$, բ) $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}$:

334. ա) $2^{x+1}-4^{x}<1$, բ) $3\cdot 9^{x}\le 8\cdot 3^{x}+3$:

➤**335.** ա) $2^{2+x}-2^{2-x}\ge 15$, բ) $2^{x}-1<6\cdot 2^{-x}$:

➤**336.** ա) $\frac{1}{3^{x}+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$, բ) $\frac{1}{2^{x}+3}\le\frac{1}{2^{x+2}-1}$:

➤**337.** ա) $5\cdot 2^{2x+1}-21\cdot 10^{x}>2\cdot 5^{2x+1}$, բ) $27\cdot 4^{x}-35\cdot 6^{x}+8\cdot 9^{x}\le 0$:

Գտեք արտահայտության արժեքը (338-339):

338. ա) $81^{0{,}5\log_9 7}+\log_{81}\sqrt{3}$, բ) $9^{\log_{25}5+\log_3\sqrt{5}}+3\log_4\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$:

339. ա) $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11}9\cdot\log_5 121$, բ) $\left(30-5^{1+\log_5 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{5}\cdot\log_5 4$:

Լուծեք հավասարումը (340-346):

340. ա) $\log_3(2x+1)=-1$, բ) $\log_2(5x-6)=6$:

341. ա) $\log_x(3x-2)=2$, բ) $\log_x(4x-3)=2$:

342. ա) $\log_5^2 x+\frac{3}{2}\log_5 x-1=0$, բ) $\lg^2 x-\lg x-2=0$:

343. ա) $(\lg x+4)(2-\lg x)=5$, բ) $\dfrac{1}{5+\lg x}+\dfrac{2}{1-\lg x}=1$:

344. ա) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$, բ) $\log_3(x+4)-\log_3(x-4)=2$:

➢**345.** ա) $x^{\lg x+1}=100$, բ) $8\cdot x^{\log_8 x}=x^2$:

* **346.** ա) $4^{\log_4^2 x}+x^{\log_4 x}=8$, բ) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$:

➢**347.** Լուծեք համակարգը:

ա) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\lg(xy)=3\\ \lg x\cdot\lg y=2\end{cases}$:

Լուծեք անհավասարումը (348-356):

348. ա) $\log_{0,2}(2x-5)\ge 0$, բ) $\log_3(2-x)\le 1$:

349. ա) $\log_5\sqrt{x}-2\log_{25}x>2$, բ) $\log_5\dfrac{x}{5}+\log_{\frac{1}{25}}x<1$:

350. ա) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$, բ) $\lg\left(2x^2+4x+10\right)>\lg\left(x^2-4x+3\right)$:

351. ա) $\lg^2 x-2\lg x-8\le 0$, բ) $\log_2^2 x-8\log_2 x+12<0$:

352. ա) $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\ge 0$, բ) $\log_{0,5}^2(3x-1)>\log_{0,5}(3x-1)+6$:

➢**353.** ա) $\dfrac{4}{\log_3 x+2}\le 1$, բ) $\dfrac{1}{\log_2(x+3)}\ge 3$:

➢**354.** ա) $\log_{0,5}(x+1)>\log_2(2-x)$, բ) $\log_2\left(\dfrac{4}{x+3}\right)>\log_2(2-x)$:

➢**355.** ա) $\log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0$, բ) $\log_4(x+12)\ge\log_2 x$:

356. ա) $\dfrac{1}{\log_5(3-2x)}\le\dfrac{1}{4-\log_5(3-2x)}$, բ) $\dfrac{1}{\lg x}-\dfrac{1}{\lg x-1}<1$:

357. Ձևակերպեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները:

ա) $4>0,\ 4=0$, բ) $5>-1,\ 5=-1$, գ) $8>8,\ 8=8$, բ) $9<9,\ 9=9$:

Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը (358-360):

358. ա) Կամայական բնական թիվ զույգ է կամ կենտ:

բ) Կամայական իրական թիվ ռացիոնալ է կամ իռացիոնալ:

գ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 3-ի և 5-ի:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 44-ի և չի բաժանվում 11-ի:

359. ա) Կամայական բնական թվի հակադարձը ռացիոնալ թիվ է:

բ) Գոյություն ունի ամբողջ թիվ, որի հակադարձը ռացիոնալ թիվ չէ:

գ) Կամայական բնական թվի համար գոյություն ունի դրանից մեծ բնական թիվ:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը փոքր է մնացած բնական թվերից:

360. ա) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

բ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական ֆունկցիա իր մեծագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մաքսիմումի կետում:

գ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա իր փոքրագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մինիմումի կետում:

➢**361.** Ձևակերպեք հետևության հակադարձն ու հակադիրը և պարզեք ճշմարտային արժեքները:

ա) Եթե $a>1$ և $b>0$, ապա $a^b>1$:

բ) Եթե $a>1$ և $b>1$, ապա $\log_a b>0$:

գ) Եթե $a>1$, ապա $y=a^x$ ֆունկցիան աճող է:

դ) Եթե $a>1$, ապա $y=\log_a x$ ֆունկցիան աճող է:

ե) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

զ) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է:

362. Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը:

ա) $a_n=12-n$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

բ) $a_n=\dfrac{2n+5}{n+1}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

գ) $a_n=3-n^2$ հաջորդականությունը նվազող է:

դ) $a_n=(n-5)^2$ հաջորդականությունն աճող է:

ե) $a_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

զ) $a_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}$ հաջորդականությունը զուգամետ է:

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը (363-367):

363. ա) $y=x^3-7x^{15}+1$, բ) $y=x^{23}-23x^7+11x$:

364. ա) $y=\frac{x^2-1}{x+3}$, բ) $y=x^2-\frac{1}{x}$:

365. ա) $y=\sin 3x-2$, բ) $y=\operatorname{tg} 2x+4$:

366. ա) $y=x^7+\ln x$, բ) $y=\cos x-\log_2 x$:

367. ա) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$, բ) $y=2^x-4^{-x}$:

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (368-370):

368. ա) $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\frac{1-x}{x^2+3}$, $x_0=1$:

369. ա) $f(x)=7\sin x+3\cos x-7$, $x_0=\frac{\pi}{2}$,

➢ բ) $f(x)=\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}+11$, $x_0=\frac{5\pi}{6}$:

370. ա) $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)\sin 2x$, $x_0=0$,

բ) $f(x)=\left(x^2+3x+15\right)\cdot\operatorname{tg} x-5$, $x_0=0$:

371. Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցով տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին:

ա) $f(x)=x^3+3x^2-5$, $y=24x+1$,

բ) $f(x)=2e^{-x}+1$, $y=-2x+4$:

Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը (372-373):

372. ա) $f(x)=x^2-5x+7$, $x_0=2$, բ) $f(x)=2+x-x^2$, $x_0=-1$:

373. ա) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+1$, $x_0=4$:

Գտեք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (374-375):

374. ա) $f(x)=x^3-3x^2+4$, բ) $f(x)=x^3+6x^2-15x-2$:

375. ա) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$, բ) $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$:

Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (376-378):

376. ա) $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$, բ) $f(x)=(x-4)^2(x-1)$:

377. ա) $f(x)=8x-\frac{4}{x^2}$, բ) $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$:

➢**378.** ա) $f(x)=5^x+5^{2-x}$, բ) $f(x)=6x+e^{-6x}$:

Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (379-381):

379. ա) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$, $[-2;1]$, բ) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-5$, $[1;4]$:

380. ա) $f(x)=x^4-4x^2$, $[-3;3]$, բ) $f(x)=4x^4-2x^2-5$, $[0;2]$:

381. ա) $f(x)=x+\sin x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ➢բ) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

382. 26-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով, այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

383. 18-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով, այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**384.** 64-ը ներկայացրեք երկու թվերի գումարով այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**385.** Գտեք այն դրական թիվը, որի քառակուսու եռապատիկի և խորանարդի տարբերությունը մեծագույնն է:

➢**386.** Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները ներքնաձիգի վրա են՝ մեկական էջերի վրա: Գտեք ուղղանկյան մակերեսի մեծագույն արժեքը, եթե եռանկյան ներքնաձիգը 8 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝ 60°:

Պատասխաններ

1.ա) $f(7)<f(8)$ **բ)** $f(0,3)<f(0,4)$ **գ)** $f(-24)>f(-23)$ **դ)** $f(-5,5)>f(-5,4)$ **ե)** $f(-52)=f(52)$ **զ)** $f(-7,3)<f(8)$ **2. ա)** $f(13)>f(12)$ **բ)** $f(0,02)>f(0,01)$ **գ)** $f(-4)>f(-10)$ **դ)** $f(-9,4)>f(-9,5)$ **ե)** $f(-73)<f(73)$ **զ)** $f(-5,9)<f(6)$ **3. ա)** $(3,4)^2$, $(3,4)^3$, $(3,4)^5$ **բ)** $(0,7)^9$, $(0,7)^4$, $0,7$ **գ)** $(2/5)^7$, $(2/5)^5$, $(2/5)^4$ **դ)** $9/8$, $(9/8)^4$, $(9/8)^7$ **5. ա)** $(0;\infty)$ **բ)** $(-\infty;0]$ **գ)** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **դ)** $\{0\}$ **ե)** $(-\infty;\infty)$ **զ)** $(-\infty;\infty)$ **է)** $\varnothing$ **ը)** $(-2;\infty)$ **թ)** $(-\infty;-5]$ **6.ա)** -1, 1 **բ)** 3 **գ)** -7, 7 **դ)** 0 **ե)** -1, 0, 1 **զ)** -1, 0, 1 **7. ա)** $(-2;2)$ **բ)** $(-\infty;-0,5)\cup(0,5;\infty)$ **գ)** $(0,5;\infty)$ **8.ա)** $a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}$ **բ)** $a-a^{1/2}b^{1/2}+b$ **գ)** $x^{1/3}-2$ **9.ա)** $f(15)>f(14)$ **բ)** $f(5,3)<f(5,4)$ **գ)** $f(0)<f(8,3)$ **10. ա)** $f(9)>f(7)$ **բ)** $f(7,09)<f(7,1)$ **գ)** $f(-22)<f(-20)$ **դ)** $f(-3,2)<f(-3,1)$ **ե)** $f(-23)<f(23)$ **զ)** $f(-8,1)<f(6,2)$ **11. ա)** $[0;\infty)$ **բ)** $(-\infty;\infty)$ **գ)** $[0;\infty)$ **դ)** $[0;\infty)$ **12. ա)** $(3;\infty)$ **բ)** $(-\infty 2)\cup(2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;0,5)\cup(0,5;1)\cup(1;\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$ **14. ա)** 49 **բ)** 16 **գ)** 125 **դ)** -27 **ե)** 512 **զ)** 10000 **15.** 21 **16.** 19 **17. ա)** $(0;\infty)$ **բ)** $(0;\infty)$ **գ)** $(-\infty;0)$ **դ)** $(-4;\infty)$ **ե)** $(-\infty;5)$ **զ)** $(-\infty;1)$ **18. ա)** $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ **բ)** $\uparrow$, երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ **գ)** $\uparrow$, երբ $a>-1$, $\downarrow$, երբ $-1,5<a<-1$ **դ)** $\uparrow$, երբ $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $\downarrow$, երբ $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ **19. ա)** 1 **բ)** 1 **գ)** 0 **20.ա)** 1100000 **բ)** 210000 **գ)** k տարի հետո գումարը կլինի $1000000\cdot(1,1)^k$ **դ)** 4 **21. ա)** $[1;\infty)$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 **բ)** $(0;1]$, մեծագույնը՝ 1, փոքրագույն արժեք չունի **գ)** $[0;8/3]$, մեծագույնը՝ $8/3$, փոքրագույնը՝ 0 **23. ա)** $3\cdot243^x$ **բ)** $18\cdot48^x$ **գ)** $1,25\cdot50^x$ **դ)** $40,5\cdot288^x$ **ե)** $3\cdot81^x$ **զ)** $25\cdot125^x$ **24. ա)** 47 **բ)** 7 **գ)** 23 **37. ա)** 18 **բ)** 76 **գ)** 527 **26. ա)** $1/3$ **բ)** $-0,4$ **գ)** $0,75$ **դ)** $-1/6$ **27. ա)** 5 **բ)** -1 **գ)** $-0,5$ **դ)** -2 **ե)** 4 **զ)** $-1/3$ **28. ա)** 2 **բ)** 0 **գ)** 11 **դ)** 12 **ե)** -1 **զ)** $3,5$ **29. ա)** $+$ **բ)** $-$ **գ)** $-$ **դ)** $-$ **30. ա)** 5 **բ)** 1 **գ)** 6 **դ)** $5/3$ **31. ա)** 1 **բ)** -5 **գ)** -1 **դ)** -1 **ե)** 3 **զ)** $3,5$ **32. ա)** 2 **բ)** 3 **գ)** 3 **դ)** -2 **33. ա)** 1 **բ)** 1 **գ)** -3 **դ)** 2 **34. ա)** 3 **բ)** $-0,5$ **գ)** 3 **դ)** 3 **35. ա)** 13 **բ)** 2 **գ)** 3 **դ)** 13 **36. ա)** 4 **բ)** 1 **գ)** -1 **դ)** -3 **37. ա)** 6 **բ)** 1 **գ)** 1 **դ)** 1 **38.ա)** 0 **բ)** 1 **գ)** -2 **դ)** -4 **ե)** -2, 2 **զ)** 2 **39.ա)** $(1,6;\infty)$ **բ)** $(-1,5;\infty)$ **գ)** $(0;1)$ **40.ա)** $(-\infty;0,5]$ **բ)** $(-2;-3/7]$ **գ)** $[-7;-5/3)\cup(2;\infty)$ **41.ա)** $(-\infty;4)$ **բ)** $[-1;\infty)$ **գ)** $(-3;\infty)$ **դ)** $(-\infty;-3]$ **ե)** $(-2;\infty)$ **զ)** $[-3;\infty)$ **է)** $(-\infty;-2)$ **ը)** $[-6;\infty)$ **թ)** $(-\infty;-6)$ **42.ա)** $(-\infty;3)$ **բ)** $(-1;\infty)$ **գ)** $[-4;\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $\varnothing$ **43. ա)** $(-\infty;2)$ **բ)** $[36/7;\infty)$ **գ)** $[10;\infty)$ **դ)** $(-\infty;3)$ **44. ա)** $(-\infty;-4/3)\cup(1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2,5]\cup[1;\infty)$ **գ)** $[0;1,2]$ **դ)** $(-\infty;-12)\cup(-2;\infty)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$ **45. ա)** $[1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;3)$ **գ)** $(-1;\infty)$ **դ)** $[-3;\infty)$ **46.ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(-2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-1]$ **դ)** $(-\infty;-3)$ **47.ա)** $(2;\infty)$ **բ)** $[2;\infty)$ **գ)** $(3;\infty)$ **դ)** $(-\infty;2)$ **48.ա)** $(6;\infty)$ **բ)** $[-9;\infty)$ **գ)** $(-2;\infty)$ **դ)** $(-\infty;6]$ **49.ա)** $(-\infty;-2]\cup$

$\cup[2;\infty)$ **բ)** $(-2;4)$ **գ)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **դ)** $[3;5]$ **50.ա)** $(-\infty;1]$ **բ)** $[0;\infty)$ **գ)** $(-1;2)$ **դ)** $(-\infty;-2]\cup$
$\cup[2;\infty)$ **51. ա)** $(2;4)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup[0;\infty)$ **52.** 2ժ **53.** 4ժ **55.** 6կմ 55. **ա)** 4 **բ)** 4 **գ)** -3 **դ)** -3
56. ա) 0,4 **բ)** 1,5 **գ)** 7/3 **դ)** $-2{,}5$ **57. ա)** 144 **բ)** 81 **գ)** 4 **դ)** 64 **58. ա)** 1,5 **բ)** 1,5 **գ)** $-1{,}5$
դ) 0,75 **59. ա)** $\log_8 5$ **բ)** $\log_{0,5} 3$ **գ)** $-\lg 6$ **դ)** $\log_2 9-1$ **60. ա)** 6 **բ)** 0,2 **գ)** 25 **դ)** 5 **ե)** ± 5
զ) $\pm 0{,}25$ **61. ա)** $(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ **բ)** $(-1;1)$ **գ)** $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$ **62.** Գինն իջավ 4%-ով
63. Գինն իջավ 4%-ով **64.ա)** 2 **բ)** -2 **գ)** 3 **դ)** 2 **ե)** -3 **զ)** 2 **65.ա)** 1,5 **բ)** 4/3 **գ)** -2 **դ)** 2
66. ա) 2 **բ)** 0,5 **67. ա)** 0,5 **բ)** 2 **գ)** 1,125 **դ)** 4/3 **68. ա)** $2+1{,}5\cdot\lg a+\lg b+0{,}5\cdot\lg c$
բ) $-3+4\lg a-1{,}5\cdot\lg b+2\lg c$ **գ)** $3+2\lg a+0{,}5\cdot\lg b-3\lg c$ **դ)** $1+5\lg a-0{,}5\cdot\lg b-2\lg c$
ե) $-2+7\lg b/3-0{,}5\cdot\lg c$ **զ)** $-1-2\lg a+3\lg b/7-3\lg c$ **70. ա)** -2 **բ)** -2 **գ)** 1 **դ)** 2 **ե)** 2
զ) 12 **71. ա)** 0,4 **բ)** 2/3 **գ)** 100 **դ)** 24 **72. ա)** 24 **բ)** 890 **գ)** 125 **դ)** 0,1 **73. ա)** 2 **բ)** 5 **գ)** 1
դ) $-0{,}25$ **ե)** 3 **զ)** 1 **74. ա)** $x>0$ **բ)** $x<0$ **գ)** $x\neq 0$ **դ)** $x>0$ **75. ա)** $\lg q$ **բ)** $\lg q$ **76. ա)** 41 **բ)** 44/9
գ) -22 **77.ա)** $(1{,}2;\infty)$ **բ)** $(-\infty;2)$ **գ)** $(-\infty;-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7};\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **ե)** $(-2{,}5;1)$ **զ)** $(0{,}5;3)$
78. ա) $\log_3 7>\log_3 5$ **բ)** $\lg 0{,}7<\lg 0{,}71$ **գ)** $\log_{1/3} 6<\log_{1/3} 4$ **դ)** $\log_{0,4}\sqrt{3}<0$
ե) $\log_4\sqrt[3]{3}>0$ **զ)** $\log_{\sqrt{3}} 2>1$ **79. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\uparrow$ **80. ա)** $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ **բ)** $\uparrow$,
երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ **գ)** $\uparrow$, երբ $a<1$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ **81. ա)** + **բ)** − **գ)** + **դ)** −
82. ա) $(2;3)$-ում՝ բացասական, $(3;\infty)$-ում՝ դրական **բ)** $(1{,}5;2)$-ում՝ դրական, $(2;\infty)$-ում՝
բացասական **գ)** $(-\infty;-2)$-ում և $(2;\infty)$-ում՝ դրական, $(-2;-\sqrt{3})$-ում և $(\sqrt{3};2)$-ում՝ բացասական
84. ա) $[2;\infty)$, 2 **բ)** $[0;\infty)$, 0 **գ)** $[-1;\infty)$, -1 **85. ա)** $(-\infty;-1]$, -1 **բ)** $(-\infty;1]$, 1 **գ)** $(-\infty;1]$, 1
86. ա) $(1;2)\cup(2;5)$ **բ)** $(-3;1)\cup(1;2)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $(-4;2)\cup(2;3)$ **ե)** $(0;1)\cup(1;7)$ **զ)** $(4;5)\cup(5;\infty)$
88.ա) 26 **բ)** 3,55 **գ)** 3 **դ)** 3 **89.ա)** -2, 4 **բ)** -1, $-1/7$ **գ)** -13, 6 **դ)** $-10/3$, 2 **90. ա)** 11 **բ)** 47,5
գ) 20 **դ)** 37,4 **91. ա)** $\varnothing$ **բ)** 5 **գ)** 0 **դ)** $(\sqrt{41}-3)/2$, 2 **92. ա)** 0 **բ)** $\sqrt{2}$ **գ)** 6 **դ)** 2 **93. ա)** 1, 9
բ) 5 **գ)** 2 **94. ա)** 0,01, 1000 **բ)** 101, 1001 **գ)** 0,25, 0,5 **դ)** 100, 10^8 **95. ա)** 1/3, 27 **բ)** 11
գ) 1/6, $6^{7/3}$ **դ)** 2 **96. ա)** 10, $10^{-3,5}$ **բ)** 10, $10^{-1,4}$ **գ)** 9, $3^{-11/6}$
դ) 0,25, 8 **97. ա)** 5 **բ)** 4 **գ)** 81 **դ)** 8 **98. ա)** $(\log_3 5-2)/4$ **բ)** $(\lg 2-3)/2$ **գ)** $(\log_4 6+1)/5$
դ) $(\log_2 7+5)/10$ **99. ա)** 81, 1/3 **բ)** 100, 0,1 **գ)** 125, 0,2 **դ)** 81, 1/3 **100. ա)** 0 **բ)** -1, 2
101. ա) $(2;32)$, $(32;2)$ **բ)** $(8;0{,}25)$ **գ)** $(7;9)$, $(9;7)$ **դ)** $(15;10)$ **104. ա)** $[13;\infty)$ **բ)** $(5/2;23/9)$
գ) $(5;5{,}04]$ **դ)** $[31;\infty)$ **ե)** $(-1;6)$ **զ)** $(8;8{,}2)$ **է)** $(7/3;\infty)$ **ը)** $[-1{,}75;\infty)$ **թ)** $(1{,}5;19/12]$
105. ա) $\left(-8;-(7+\sqrt{69})/2\right)\cup\left((\sqrt{69}-7)/2;1\right)$ **բ)** $(-\infty;-4]\cup[2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-316/63)\cup(-4;\infty)$
դ) $(1/3;1{,}5)$ **106. ա)** $(-3;11/3)$ **բ)** $(-5/7;25/7)$ **գ)** $(0;4/3)\cup(8/3;4)$ **դ)** $[-5;-1)\cup(4;8]$
107.ա) $[2;\infty)$ **բ)** $(5;\infty)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $[5;\infty)$ **108.ա)** $(4;\infty)$ **բ)** $(4;5]$ **գ)** $(0;2{,}5)\cup(4;6{,}5)$ **դ)** $[0;\infty)$

109. ա) $(0;2^{-1,25})\cup(2;\infty)$ բ) $[6;36]$ գ) $(0,1;100)\cup(10^3;10^5)$ դ) $(0;1/16)\cup\left[2^{-2\sqrt{2}};2^{2\sqrt{2}}\right]$ **110.** ա) $(0;0,125)\cup(4;\infty)$ բ) $[1/27;3]$ գ) $(0,1;100)$ **111.** ա) $(5/3;2)$ բ) $(3,5;4)$ **112.** ա) $1/3$ բ) $4/33$ գ) $38/9$ դ) $41/30$ ե) $497/198$ **113.** $-0,5$ **114**[1]. ա) Կ բ) Կ գ) Կ դ) Կ ե) Կ զ) Կ **115.** ա) Ճ բ) Կ գ) Ճ դ) Կ **116.** ա) Կ բ) Կ գ) Ճ դ) Ճ ե) Ճ **117.** Ասույթ են ա)-ն և գ)-ն **118.** ա) $5\ge 2$, Ճ, $5>2$ և $5=2$, Կ բ) $3\ge 3$, Ճ, $3>3$ և $3=3$, Կ գ) $7\le 9$, Ճ, $7<9$ և $7=9$, Կ դ) $8\le 8$, Ճ, $8<8$ և $8=8$, Կ **119.** ա) Ճ բ) Կ **120.** ա) $x\ge 1$ բ) $x\le 5$ գ) $|x|>7$ դ) $|x|<4$ ե) $x\le 19$ զ) $x\ge 21$ **122.** ա) AB, BC, AC կողմերից որևէ երկուսը հավասար չեն բ) AB, BC, AC կողմերից կամայական երկուսն իրար հավասար չեն: գ) Հանդիպակաց կողմերից որևէ երկուսը զուգահեռ չեն: դ) Հանդիպակաց կողմերից կամայական երկուսը զուգահեռ չեն: **123.** ա) Դահլիճում կա դուռ, որ փայտից չէ: բ) Գոյություն ունի բակ, որտեղ մեքենա կանգնած չէ գ) Բոլոր ծաղիկները գարնանը ծաղկում են: դ) Յուրաքանչյուր ծաղիկ աշնանը ծաղկում է: **125.** բ) **126.** դ) **128.** ա) Կ բ) Ճ գ) Կ դ) Կ **133.** ա) Ճ բ) Կ գ) Կ դ) Կ ե) Կ զ) Ճ, փոխհակադարձ են. ա)-ն և դ)-ն, բ)-ն և գ)-ն, փոխհակադիր են. ա)-ն և բ)-ն, դ)-ն և գ)-ն **134.** ա) $\Leftrightarrow$ բ) $\Leftrightarrow$ գ) $\Leftarrow$ դ) $\Rightarrow$ **135.** ա) $\Rightarrow$ բ) $\Leftrightarrow$ գ) $\Rightarrow$ դ) $\Leftrightarrow$ ե) $\Rightarrow$ զ) $\Leftarrow$ **136.** ա) $\Leftarrow$ բ) $\Leftarrow$ գ) $\Leftrightarrow$ դ) $\Rightarrow$ **137.** Օրինակ՝ ա) $a>b>0$ բ) $0<x<\pi$ գ) $a>1$, $b>1$ դ) $x=1$ **138.** Օրինակ՝ ա) $ac>0$ բ) $a<0$ **139.** ա) Այդ գագաթին կից կողմերը լինեն իրար հավասար բ) նրա հանդիպակաց անկյունների գումարը լինի 180° գ) նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են դ) նրա տարբերիչը լինի դրական **140.** 20սմ **141.** 21սմ **143.** ա) 26 բ) 161 գ) $4n^2-2$ դ) 9 ե) $2m^2-2k^2$ զ) $4m+2$ **144.** ա) 6 բ) -20 գ) $257/85$ դ) 4,5 **145.** ա) $2n$ բ) $2n-1$ գ) n^2 դ) 2^n ե) $(-1)^{n+1}$ զ) $a_n=8$, $n\in\mathbf{N}$ **148.** 110 **149.** 5,6 **153.** ա) 18 բ) $\varnothing$ **162.** ա) $n!$ բ) $(n-1)!$ **163.** ա) $3n$ բ) 3^n **170.** ա) 3 բ) 7 **171.** ա) 9 բ) 10, 0,0001 **172.** ա) 7 բ) 10 **174.** ա) 73 բ) 14 **176.** ա) 5, 95 բ) 10, 100 **180.** ա) 3 բ) 1 **181.** ա) 6 բ) 4 **188.** ա) 2 բ) 2 **189.** ա) -1 բ) $-1/3$ **192.** ա) 10 բ) 6 գ) 3 **193.** ա) $1/3$ բ) 0 գ) 1 դ) 2 ե) 0,25 զ) $-0,5$ **195.** ա) 1 բ) 2 գ) 0 դ) 3 ե) 1 զ) 0 **198.** ա) $1/e$ բ) e^2 գ) $3e$ դ) e^{-2} **199.** ա) e բ) e, e^{-2} **200.** ա) 1, $-10/7$ բ) 0 **201.** ա) 0,4 բ) 0,5 գ) 5 դ) 1,5 **202.** ա) 2 բ) $-2,5$ գ) $-0,5$ դ) 7 **204.** ա) 0 բ) 0 գ) 1 դ) 0,5 **205.** ա) 1 բ) 3 գ) $\sqrt{17}$ **206.** $(1+\sqrt{21})/2$ **207.** ա) 7 բ) 1 **208.** ա) -1, 3, 4 բ) -2, -1, 2 **211.** ա) $-2,32$ բ) $-2/19$ գ) 0,25 դ) $1-\sqrt{3}$ **212.** ա) $2xh+h^2$ բ) $3x^2h+3xh^2+h^3$ գ) $-h/(x(x+h))$ դ) $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ **215.** $12xh+6h^2$ **216.** ա) 1,5 բ) 6 **217.** ա) 5 բ) 2 **218.** ա) $\mathbf{R}$ բ) $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, մի-

---

[1] 3-րդ գլխի պատասխաններում «Ճ» տառը նշանակում է «ճշմարիտ է», իսկ «Կ» տառը՝ «կեղծ է»

ջակայքերի միավորումը **գ)** $(-1;0)\cup(0;\infty)$ **դ)** $[-3;-1]$ **221.** 18 **222.** 18, 20, 24 **223. ա)** 6 մ/վրկ, **բ)** 5 մ/վրկ **գ)** 4,4 մ/վրկ **224. ա)** 16 մ/վրկ **բ)** 13,75 մ/վրկ **գ)** 13,3 մ/վրկ **225. ա)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **բ)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **226. ա)** 10 մ/վրկ, 10 մ/վրկ **բ)** 7 մ/վրկ, 4 մ/վրկ **227. ա)** 14, 26 **բ)** 23, 20 **228. ա)** 97, 96,75 **բ)** 82, 81 **229.** 4,5 ժամ, 3,6 ժամ **230.** 1 ժամ 40 րոպե **231. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 0 **232. ա)** 3 **բ)** 3 **գ)** 3 **233. ա)** 15 **բ)** −18,5 **գ)** 65 **234.ա)** −4 **բ)** −1 **գ)** −1/9 **235.ա)** 8 **բ)** −15 **գ)** 1 **236.ա)** 3 **բ)** 48 **գ)** 27 **237.ա)** −1 **բ)** −1/9 **գ)** −0,04 **238.ա)** 4 մ/վրկ **բ)** 8 մ/վրկ **գ)** 0 մ/վրկ **239.ա)** 0,5 մ/վրկ **բ)** 0,25 մ/վրկ **գ)** 1/6 մ/վրկ **240.ա)** 0,5 **բ)** 0,25 **գ)** 1/6 **241. ա)** $(-\infty;-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\infty)$ **բ)** $[-3;-1]\cup[1;3]$ **242. ա)** $(\log_2 6;3]$ **բ)** $(\log_5 2;0{,}5)$ **243. ա)** $2x+5$ **բ)** $3-2x$ **244. ա)** $4x^3+6x-2$ **բ)** $3x^2-5x^4$ **245. ա)** $2/\sqrt{x}-3x^2$ **բ)** $-5/x^2-0{,}5/\sqrt{x}$ **246. ա)** $1+1/x^2$ **բ)** $2+0{,}5/\sqrt{x}+2/x^2$ **247. ա)** $3{,}5x^{2,5}-5x^{1,5}$ **բ)** $-2/x^2-2x$ **248. ա)** $-3/x^2+0{,}5/x^{1,5}$ **բ)** $3\sqrt{x}-2-0{,}5/\sqrt{x}$ **249. ա)** −4,5 **բ)** −4,3125 **250. ա)** 8,5 **բ)** 24 **251. ա)** 2, 3 **բ)** ± 2, $\pm\sqrt{2}$ **գ)** $\pm 1/3$ **դ)** $\pm 0{,}4$ **252. ա)** $(-\infty;-3)\cup(7;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ **253. ա)** $\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;5]$ **բ)** $-\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;-1]$ **գ)** $\log_2\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)-1$, $x\in[2;2{,}5]$ **դ)** $\log_3\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)-\log_3 2$, $x\in[2;10/3]$ **254.ա)** $3x^2+14x^{2,5}$ **բ)** $1{,}25x^{0,25}+x^{-4/3}$ **գ)** $\pi x^{\pi-1}+\pi$ **դ)** $-4x^{-5/3}-0{,}1x^{-0,9}$ **255. ա)** $4x^{-4/3}-0{,}5x^{-0,5}$ **բ)** $0{,}5x^{-0,5}-x^{-4/3}$ **գ)** $-0{,}5x^{-1,5}+1/\left(3x^{4/3}\right)$ **դ)** $-1{,}2x^{-1,2}-5/\left(6x^{7/6}\right)$ **256. ա)** $1/(1-x)^2$ **բ)** $\left(2x^2+4x+4\right)/(x+1)^2$ **257. ա)** $(4x-6)/x^3$ **բ)** $\left(3x^2-1\right)/\left(2x\sqrt{x}\right)$ **258. ա)** $\left(2x^3+1\right)/x^2$ **բ)** $\left(6x^8-12x^5+15x^2\right)/\left(1-x^3\right)^2$ **259. ա)** $-\left(5\sqrt{x}+6\right)/2x^4$ **բ)** $\left(x^4-3x^2+2x\right)/\left(x^2-1\right)^2$ **260. ա)** $48(4x-2)^{11}$ **բ)** $-30(3-2x)^{14}$ **գ)** $9(2-x)^{-10}$ **դ)** $-12(x+1)^{-13}$ **ե)** $-200(5x-1)^{-11}$ **զ)** $36(1-2x)^{-19}$ **261. ա)** −1,25 **բ)** −5 **262. ա)** −1 **բ)** 0,5 **263. ա)** $\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$ **բ)** $1\pm\sqrt{3}$ **գ)** $-1\pm\sqrt{2}$ **դ)** $2\pm\sqrt{2}$ **264.** 4 կմ/ժ, 6 կմ/ժ **265.** 40 կմ/ժ, 60 կմ/ժ **266. ա)** $1{,}5x^{0,5}+2$ **բ)** $-x^{1,5}$ **գ)** $\dfrac{3x^2-4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ **դ)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ **267. ա)** $\cos x+e^x$ **բ)** $-\sin x+\dfrac{1}{x\ln 7}$ **գ)** $5^x\ln 5+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **ե)** $4{,}1\cdot x^{3,1}-\sin x$ **զ)** $-\sin x-e^x$ **268. ա)** $4\cos 4x$ **բ)** $-\pi\sin\pi x$ **գ)** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $-\dfrac{5}{\sin^2 x}$ **269. ա)** $10\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **բ)** $2\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)$ **գ)** $\dfrac{12}{\cos^2(3x-1)}$ **դ)** $-\dfrac{30}{\sin^2(4-5x)}$ **270. ա)** $2e^{2x}+1$ **բ)** $-2^{-x}\ln 2$ **գ)** $\dfrac{3}{3x+1}$ **դ)** $\dfrac{1}{(x-2)\ln 5}-1$

271. ա) $\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}+\ln x+1$ բ) $\frac{2}{\cos^2 2x}+5e^{5x}$ գ) $-2\sin(2x+3)-\frac{1}{x\ln 3}$ դ) $\frac{1}{\sin^2(5-x)}-$
$-4^{-x}\ln 4$ **272.** ա) $\ln x$ բ) $\frac{1}{(x+1)\ln 2}$ գ) $\frac{3^x}{x}+3^x\cdot\ln 3\cdot\ln x$ դ) $\frac{e^x}{e^x+1}$ **273.** ա) -10 բ) 24
գ) 2 դ) $-2\sqrt{2}$ **274.** ա) -1 բ) 1 **277.** ա) $\pi/6$ բ) $3\pi/4$ գ) $\pi/4$ դ) 0 ե) $\operatorname{arctg}(1,5)$ զ) $\pi/4$
278. ա) -4, 2 բ) πk գ) $\pm\pi/12+\pi k$ դ) $\pi k/2$ **279.** ա) 1) x_4 2) x_2, x_4 3) x_5 4) x_3 5) x_1
բ) 1) x_3 2) x_3, x_4 3) x_1 4) x_5 5) x_2 **280.** ա) $y=4-2x$ բ) $y=3x+1$ գ) $y=2-x$ դ) $y=$
$=3x+2$ ե) $y=0$ զ) $y=2$ **281.** ա) $y=4x+\sqrt{3}-4\pi/3$ բ) $y=4$ գ) $y=3ex-2e$ դ) $y=$
$=-ex$ **282.** ա) 0 բ) 0 **283.** ա) $(0;2)$, $(2;0)$ բ) $((\pi-4)/8;0)$, $(0;\sqrt{2}(4-\pi)/8)$ գ) $(0;3)$, $(-1;0)$
դ) $(0;1-\log_7 e)$, $(7-7\ln 7;0)$ **284.** ա) $\downarrow$ $(-\infty;1]$-ում, $\uparrow$ $[1;\infty)$-ում բ) $\uparrow$ $(-\infty;-4]$-ում, $\downarrow$ $[-4;\infty)$-ում գ) $\uparrow$ $(-\infty;2]$-ում, $\downarrow$ $[2;\infty)$-ում դ) $\downarrow$ $(-\infty;0,5)$ և $(0,5;2,5]$-ում, $\uparrow$ $[2,5;4,5)$-ում և $(4,5;\infty)$-ում
285. ա) $0,75$ բ) $1,5$ գ) 0, 1 դ) 0, 3 ե) ±1, 0 զ) $-1/3$, 3 **286.** ա) $\pi/2+\pi k$ բ) πk գ) πk
դ) $\pi k/2$ ե) 0 զ) 0 **287.** ա) $\downarrow$ $(-\infty;\infty)$-ում բ) $\uparrow$ $(-\infty;\infty)$-ում գ) $\downarrow$ $(-\infty;4]$-ում, $\uparrow$ $[4;\infty)$-ում
դ) $\uparrow$ $(-\infty;3]$-ում, $\downarrow$ $[3;\infty)$-ում **288.** ա) $\uparrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-1;0)$-ում և $(0;1]$-ում
բ) $\uparrow$ $(-\infty;-0,5]$-ում և $[0,5;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-0,5;0)$-ում և $(0;0,5]$-ում
գ) $\uparrow$ $(-\infty;-4)$-ում և $(-4;\infty)$-ում դ) $\downarrow$ $(-\infty;-3,5)$-ում և $(-3,5;\infty)$-ում **289.** ա) $\uparrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-3;1]$-ում բ) $\downarrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\uparrow$ $[-1;3]$-ում գ) $\uparrow$ $(-\infty;2]$-ում, $\downarrow$ $[2;\infty)$-ում դ) $\downarrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[0;3]$-ում, $\uparrow$ $[-3;0]$-ում և $[3;\infty)$-ում
290. ա) $\uparrow$ $(-\infty;11-\sqrt{145}]$-ում և $[11+\sqrt{145};\infty)$-ում, $\downarrow$ $[11-\sqrt{145};11+\sqrt{145}]$-ում բ) $\uparrow$ $(-\infty;-5]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-5;3]$-ում գ) $\uparrow$ $(-\infty;3-\sqrt{17}]$-ում և $\downarrow$ $[3+\sqrt{17};\infty)$-ում, $[3-\sqrt{17};3+\sqrt{17}]$-ում դ) $\uparrow$ $(-\infty;(1-\sqrt{13})/2]$-ում և $[(1+\sqrt{13})/2;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[(1-\sqrt{13})/2;(1+\sqrt{13})/2]$-ում **294.** ա) $x_{\max}=2$ բ) $x_{\min}=1,5$ գ) $x_{\max}=-1$ դ) $x_{\max}=2$
295. ա) 0 բ) 0, $0,25$ գ) πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ դ) $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ **296.** ա) $x_{\min}=1$ բ) $x_{\max}=-4$
գ) $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ դ) $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=3$ **297.** ա) $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$
բ) $x_{\max}=-\sqrt{2}$, $x_{\min}=\sqrt{2}$ գ) $x_{\min}=-6$, $x_{\max}=4$ դ) $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **298.** ա) -5, 1, $y_{\min}=-0,3$, $y_{\max}=1,5$ բ) -2, 6, $y_{\min}=-0,5$, $y_{\max}=1/6$ գ) 0, $y_{\max}=3/17$ դ) 0, $y_{\min}=-1/3$ **299.** ա) $a=-3$, $b=-24$ բ) $a=12$, $b=8$ **300.** ա) 2, -1 բ) 2, -12 **301.** ա) $1/3$, -5 բ) $5/3$, $3/5$ **302.** ա) 5, 4 բ) -2, $-4,25$ գ) 5, 4 դ) 9, 2 **303.** ա) -1, -9 բ) 14, 4
գ) 110, 2 դ) 0, -375 **304.** ա) 5, 4 բ) 0, $-0,5$ գ) 0, $-0,25$ դ) 32, 12 **305.** ա) 1, -3

բ) 5, 2 **գ)** 0, −2 **դ)** 2, −1 **306. ա)** 4^{12}, 37 **բ)** 3^{14}, 29 **307. ա)** −1, −1,5 **բ)** −2, −6 **308. ա)** $e^{\pi/2}$, $-e^{\pi}$ **բ)** $\left(e^{\pi/6}+\sqrt{3}-1\right)/2$, 1 **309.** $14=7+7$ **310.** $20=10+10$ **311. ա)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **բ)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **312. ա)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **բ)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **313.** $2p/3$ **314.** 45° **315.** զույգ են դ)-ն և ե)-ն, կենտ՝ ա)-ն և բ)-ն **316. ա)** π **բ)** π **գ)** π **323.** 5 կմ/ժ **324.** 450 կմ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան
Արթուր Արտուշի Սահակյան

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Ավագ դպրոցի
11 -րդ դասարանի դասագիրք
(ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար)

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100 1/16:
Տպագրական 8 մամուլ: Տպաքանակը 1000:

Տպագրված է «Էդիթ Պրինտ» ՍՊԸ տպարանում:

ԷԴԻԹ ՊՐԻՆՏ
Երևան, Թումանյան 12
հեռ.՝ (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am

EDIT PRINT
12 Toumanyan str., Yerevan
Tel.: (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am