Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

7

Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

7

Դասագիրք հանրակրթական
դպրոցի համար

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից որպես դասագիրք հանրակրթական դպրոցի համար

Թարգմանված է ռուսերեն 15-րդ հրատարակությունից

Переводное издание выпущено в свет по лицензионному договору N 3/13 между ОАО "Издательство "Просвещение"" и ООО "Зангак–97"

Թարգմանությունը լույս է տեսել «Իզդատելստվո «Պրոսվեշչենիե»» ԲԲԸ և «Զանգակ–97» ՍՊԸ միջև կնքված N 3/13 արտոնագրային պայմանագրի համաձայն

Москва
"Просвещение" 2005

Երևան
«Զանգակ-97» 2006

ՀՏԴ 373.167.1:514 (075)
ԳՄԴ 22.151 ց 72
Ե 894

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին

Թարգմանությունը, փոխադրումը և լրացումը՝ *Ս. Է. Հակոբյանի*

В переводном издании пункты 40, 42 в главе 4 добавлены переводчиком и за содержание этих глав авторский коллектив не несет ответственности

Թարգմանված հրատարակության 4-րդ գլխի ավելացումները (40, 42 կետեր) կատարել է թարգմանիչը, որոնց բովանդակության համար հեղինակային խումբը պատասխանատվություն չի կրում

Երկրաչափություն - 7
Ե 894 Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դաս. համար/ Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև և ուրիշներ :/.– Եր.: «Զանգակ–97», 2006.– 144 էջ:

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 7–го класса
(на армянском языке)
Ереван "Зангак-97" 2006

Экземпляры переводного издания подлежат распространению только в пределах территории действия лицензионного договора N3/13.
Данное издание подлежит распространению только на территории Армянской Республики и среди армянских диаспор на территории других стран.

Թարգմանության լույս տեսած օրինակները ենթակա են տարածման միայն N3/13 արտոնագրային պայմանագրի գործողության տարածքում:
Սույն հրատարակությունը ենթակա է տարածման միայն Հայաստանի Հանրապետության տարածքում և հայկական սփյուռքում:

Ե $\frac{4306020502}{0003(01)-2006}$ 2006 ԳՄԴ 22.151 ց72

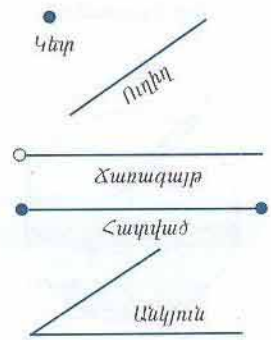
ISBN 99941-1-201-5

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սիրելի յոթերորդ դասարանցիներ

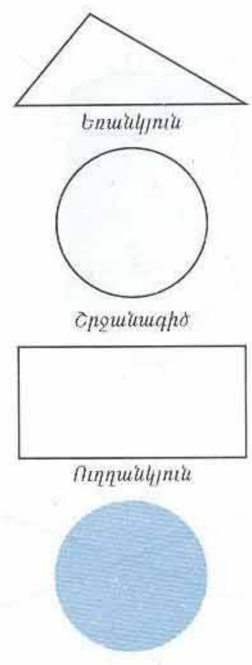
Դուք սկսում եք ուսումնասիրել մի նոր առարկա՝ *երկրաչափություն*: Այն ուղեկցելու է ձեզ ուսումնառության հետագա բոլոր տարիներին:

Երկրաչափության ակունքները շատ հեռավոր անցյալ ունեն. հնագույն գիտություններից մեկն է այն: Նրա անվանման մեջ ամփոփված են երկու բառ՝ *երկիր* և *չափել*, իսկ դա ունի իր բացատրությունը: Երկրաչափության ծագումը կապվել է զանազան չափողական աշխատանքների հետ: Դրանք անհրաժեշտ են եղել հողամաս չափելիս, ճանապարհ անցկացնելիս, շենք ու շինություն կառուցելիս և բազմաթիվ այլ կարևոր գործեր կատարելիս: Այդ գործունեության ընթացքում աստիճանաբար բացահայտվել և հավաքվել են բազմաթիվ փաստեր ու կանոններ, որոնք վերաբերում են երկրաչափական չափումներին ու կառուցումներին: Այդպիսով՝ երկրաչափությունը ծագել է մարդկանց ամենօրյա խնդիրների հիման վրա և իր զարգացման սկզբնական փուլում ծառայել է առավելապես գործնական նպատակների համար: Հետագայում այն ձևավորվել է որպես երկրաչափական պատկերներ ուսումնասիրող մի ինքնուրույն գիտություն:

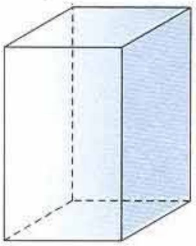


Նկ. 1

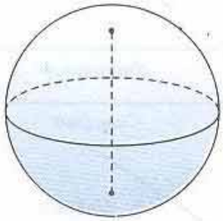
Ուսումնառության նախորդ տարիներին մաթեմատիկայի դասերին դուք արդեն ծանոթացել եք մի շարք երկրաչափական պատկերների: Դուք որոշ չափով արդեն պատկերացնում եք, թե ինչ է կետը, ուղիղը, հատվածը, ճառագայթը, անկյունը *(նկ. 1)*, տեղեկություններ ունեք, թե դրանք ինչպիսի դասավորություն ունեն միմյանց նկատմամբ: Դուք ծանոթ եք նաև մի քանի այլ պատկերների, ինչպես, օրինակ, եռանկյանը, ուղղանկյանը, շրջանին և այլն *(նկ. 2)*: Գիտեք նաև կատարել որոշ չափումներ. հատվածը՝ միլիմետրական բաժանումով քանոնի օգնությամբ, անկյունը՝ անկյունաչափի օգնությամբ: Սակայն այդ ամենը ընդամենը նախնական երկրաչափական տեղեկություններ են: Իսկ այժմ դուք ընդլայնելու և խորացնելու եք ձեր գիտելիքները երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ: Դուք կծանոթանաք երկրաչափական նոր պատկերների, իսկ ձեզ արդեն հայտնի պատկերների համար կբացահայտեք կարևոր և հետաքրքիր շատ հատկություններ: Կիմանաք, թե գործնականում ինչպես են օգտագործվում երկրաչափական պատկերների հատկությունները և, իհարկե, կզարգացնեք դրանք կիրառե-



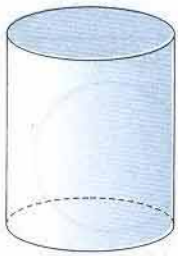
Նկ. 2



Ուղղանկյունանիստ



Գունդ



Գլան

Նկ. 3

լու կարողություններ ու հմտություններ: Այդ ամենի համար ձեզ կօգնի դասագիրքը և, անշուշտ, ուսուցիչը:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացը բաղկացած է երկու հիմնական մասերից՝ *հարթաչափությունից և տարածաչափությունից:*

Հարթաչափության մեջ ուսումնասիրվում են հարթության վրա գտնվող պատկերների հատկությունները: Այդպիսի պատկերներ են, օրինակ, հատվածները, եռանկյունները, ուղղանկյունները: Տարածաչափության մեջ ուսումնասիրվում են տարածության մեջ գտնվող պատկերների հատկությունները, ինչպես, օրինակ, ուղղանկյունանիստը, գունդը, գլանը *(նկ. 3)*: Երկրաչափության ուսումնասիրությունը մենք սկսելու ենք հարթաչափությունից:

Երկրաչափության ուսումնասիրության ընթացքում դուք կապացուցեք թեորեմներ և կլուծեք խնդիրներ: Թե ինչ է «թեորեմը», և ինչ է նշանակում «թեորեմն ապացուցել», դուք շուտով կիմանաք: Նախապես ասենք, որ երկրաչափության մեջ ձեզ ոչ միայն կհաղորդվեն պատրաստի գիտելիքներ, այլև կպահանջվի հաստատել, որ բերված դատողությունները ճշմարիտ են: Դա շատ հետաքրքիր է, և ձեզ սպասվում է մտքի և իմացության մի նոր որակի աշխատանք:

Մաթեմատիկա սովորելիս դուք լուծել եք բազմաթիվ խնդիրներ և գիտեք, թե ինչ է խնդիրը: Երկրաչափության դասընթացում ևս կան զանազան խնդիրներ, դրանց մի մասը անմիջապես շարադրված են տվյալ թեմայի հետ, իսկ մյուսը՝ գլխի վերջում: Սրանցից առաջինները հիմնականն են. դրանք անհրաժեշտ են թեմայի յուրացման համար: Մյուսները նախատեսված են գիտելիքների առավել խորացման և կարողությունների զարգացման համար: Ավելի դժվար խնդիրները դասագրքում աստղանշված են, իսկ վերջում առանձնացված է նաև առավել դժվար խնդիրների բաժինը: Դրանք, անշուշտ, նախատեսված են նրանց համար, ովքեր հատուկ հետաքրքրություն և հակում ունեն երկրաչափության նկատմամբ:

Դասագրքի վերջում զետեղված են խնդիրների պատասխանները, ինչպես նաև ցուցումներ՝ առանձին խնդիրների լուծումները որոնելիս կողմնորոշվելու համար:

Բնականաբար, ոչ բոլոր խնդիրներն են հեշտությամբ լուծվում, ջանքեր են պահանջում նաև որոշ թեորեմների ապացուցումները: Սակայն հիշեք, որ համբերության և համառ աշխատանքի շնորհիվ են ձեռք բերվում բոլոր նվաճումները: Դժվար պահերին չպետք է վարանել, այլ պետք է ցուցաբերել կամք և հնարամտություն: Անհրաժեշտ է խորհրդակցել և համագործակցել միմյանց հետ, դիմել ավագներին, իսկ առաջին հերթին՝ ուսուցչին: Երկրաչափություն սովորելը կնպաստի, որպեսզի ընդլայնվի ձեր մտահորիզոնը, զարգանա երևակայությունն ու տրամաբանելու կարողությունը, ամրապնդվի ձեր կամքն ու նպատակին հասնելու ձգտումը:

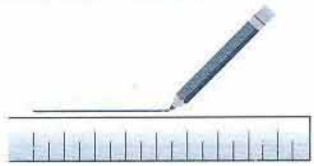
Հաջող ընթացք ձեզ, աղջիկներ և տղաներ:

ԳԼՈՒԽ I
Երկրաչափական սկզբնական տեղեկություններ

§1 ՈՒՂԻՂ ԵՎ ՀԱՏՎԱԾ

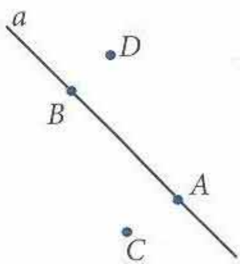
1. Կետեր, ուղիղներ, հատվածներ

Ի՞նչ գիտենք մենք կետերի և ուղիղների մասին: Հայտնի է, որ գծագրելիս ուղիղ պատկերելու համար օգտվում ենք քանոնից *(նկ. 4)*: Սակայն գծագրում պատկերում ենք ուղղի միայն մի մասը, մինչդեռ այն երկու կողմից անվերջ շարունակելի է: Այսինքն՝ ուղիղը պատկերացնում ենք որպես երկու կողմից անվերջ շարունակված: Ուղիղները, սովորաբար, նշանակում են լատինական փոքրատառերով, իսկ կետերը՝ լատինական մեծատառերով: Նկար 5-ում պատկերված են a ուղիղը և A, B, C, D կետերը: A և B կետերը գտնվում են a ուղղի վրա, իսկ C և D կետերը այդ ուղղի վրա չեն գտնվում: Նման դեպքում ասում են նաև, որ a ուղիղն անցնում է A և B կետերով, իսկ C և D կետերով չի անցնում: Իսկ կարո՞ղ ենք, արդյոք, A և B կետերով տանել մի այնպիսի ուղիղ, որ չհամընկնի a ուղղին: Կարելի է նշել, որ այդպիսի մեկ այլ ուղիղ տանել հնարավոր չէ:



Ուղղի պատկերումը գծագրի վրա

Նկ. 4

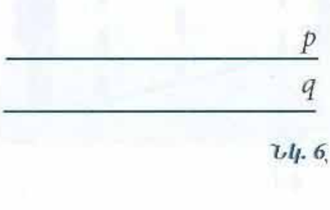


Ուղիղ և կետեր

Նկ. 5

Ընդհանրապես՝ ***ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ կա այդպիսի միայն մեկ ուղիղ***[1]:

Այժմ դիտենք երկու ուղիղ: Եթե նրանք ունեն ընդհանուր կետ, ապա կասենք, որ այդ ուղիղները *հատվում են*: Նկար 6-ում a և b ուղիղները հատվում են O կետում, իսկ p և q ուղիղները չեն հատվում:



Նկ. 6

[1] Հիշի՛ր. այստեղ և հետագայում «երկու կետ», «երեք կետ», «երկու ուղիղ» և այլն ասելով՝ միշտ կհամարենք, որ այդ կետերը, այդ ուղիղները տարբեր են:

Երկու ուղիղները չեն կարող ունենալ երկու կամ ավելի ընդհանուր կետեր: Բանն այն է, որ եթե երկու ուղիղներն ունենային երկու ընդհանուր կետեր, ապա կստացվեր, որ այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրն անցնում է նույն երկու կետով: Բայց չէ՞ որ երկու կետով անցնում է միայն մեկ ուղիղ: Այսպիսով՝ կարող ենք եզրակացնել. ***երկու ուղիղները կա՛մ ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, կա՛մ ընդհանուր կետ չունեն:***

Նկատի ունենալով, որ երկու կետերով անցնում է միայն մեկ ուղիղ, կարող ենք ասել, որ ուղիղը որոշելու համար բավական է նշել նրա որևէ երկու կետը: Ուղիղը, որի վրա նշված են երկու, օրինակ, A և B կետեր, կարելի է նշանակել նաև երկու տառով՝ AB կամ BA: Համառոտագրելու համար «A կետը գտնվում է a ուղղի վրա» նախադասության փոխարեն հաճախ օգտագործում են նաև $A \in a$ գրելաձևը, իսկ «D կետը չի գտնվում a ուղղի վրա» նախադասության փոխարեն՝ $D \notin a$ գրելաձևը:

ա)

AB հատված

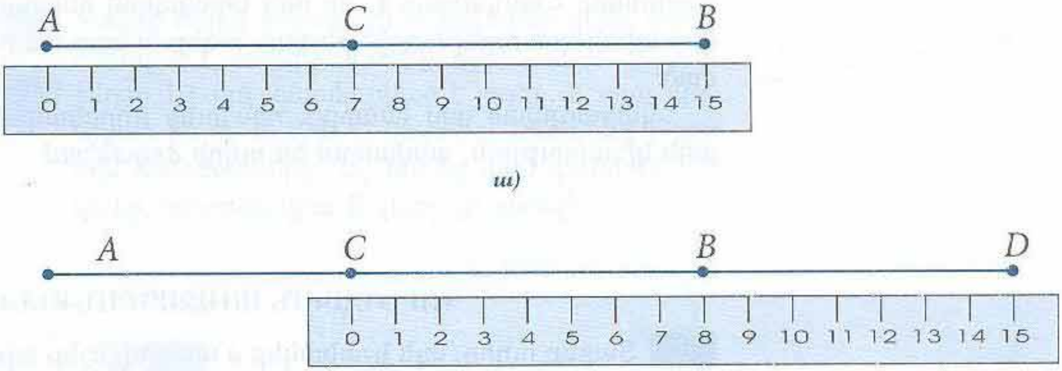
բ)

Նկ. 7

7(ա) նկարում առանձնացված է ուղղի մի մասը, որը սահմանափակված է երկու կետերով: Ուղղի այդպիսի մասը կոչվում է *հատված*: Հատվածը սահմանափակող կետերը կոչվում են նրա *ծայրեր* կամ *ծայրակետեր*: Նկար 7(բ)–ում պատկերված է A և B ծայրակետերով հատվածը: Այդ հատվածը նշանակվում է AB կամ BA: AB հատվածի վրա են գտնվում նրա A և B ծայրակետերը և AB ուղղի բոլոր այն կետերը, որոնք ընկած են A և B կետերի միջև:

2. Ուղղի ձողանշումը տեղանքում

Առօրյա գործերի մեջ հաճախ անհրաժեշտ է լինում տանել ուղիղների երկար հատվածներ: Այսպես, օրինակ, շենք կառուցելիս, հողակտոր ցանկապատելիս, խճուղի կամ երկաթգիծ կառուցելիս, էլեկտրալարեր անցկացնելիս և այլ իրավիճակներում հարկ է լինում տեղանքում գործ ունենալ ուղիղների երկար հատվածների հետ: Ինչպե՞ս վարվել. չէ՞ որ մենք այդպիսի երկար քանոններ, բնականաբար, չունենք:



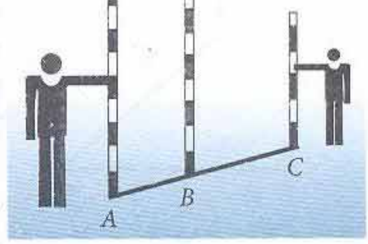
Նկ. 8

Նախ լուծենք մի այսպիսի խնդիր: *Տրված քանոնի օգնությամբ կառուցել այնպիսի հատված, որն ավելի երկար է, քան այդ քանոնը:*

Այդ նպատակով թղթի (կամ գրատախտակի) վրա դնենք քանոնը, նշենք A և B կետերը և մի որևէ C կետ՝ A և B կետերի միջև *(նկ. 8(ա))*: Այնուհետև քանոնը տեղաշարժենք դեպի աջ այնպես, որ C կետը հայտնվի նրա ձախ ծայրի մոտ: Քանոնի աջ ծայրի մոտ նշենք D կետը *(նկ. 8(բ))*: Պատկերված A, B, C և D կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Եթե այժմ մենք տանենք նախ AB հատվածը, այնուհետև՝ BD հատվածը, ապա կստանանք AD հատվածը: Իսկ վերջինս էլ ավելի երկար է, քան տրված քանոնը: Ուրեմն՝ մենք արդեն գիտենք, թե ինչպես գծել մեզ տրված քանոնից ավելի երկար հատված:

Այժմ վերադառնանք տեղանքում ուղիղների երկար հատվածներ տանելու խնդրին: Այդ խնդիրը լուծելու համար օգտվում են հենց այն հնարքից, որից մենք օգտվեցինք այժմ, երբ տարանք քանոնից ավելի երկար հատված: Իսկ հնարքը հետևյալն է:

Սկզբում նշում են որևէ երկու կետ՝ A և B: Դրա համար օգտագործում են երկու նշաձող՝ մոտ 2 մ երկարությամբ: Սովորաբար դրանց մի ծայրը սրում են՝ հողի մեջ հեշտությամբ ցցելու համար: Երրորդ նշաձողը դրվում է այնպես, որ A և B կետերում դրված նշաձողերը նրան ծածկեն A կետում գտնվող դիտողից *(C կետը նկ. 9-ում)*: Հաջորդ նշաձողը դրվում է այնպես, որ նրան ծածկեն B և C կետերում դրված նշաձողերը, և այդպես



Նկ. 9

շարունակ: Հասկանալի է, որ այդ եղանակով հնարավոր կլինի կառուցել ուղղի՝ ինչքան ուզեք երկար հատված:

Նկարագրված այս հնարքը, որն ունի գործնական լայն կիրառություն, անվանում են ուղղի *ձողանշում*:

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Տարեք ուղիղ, այն նշանակեք a տառով, նշեք այդ ուղղի վրա գտնվող A և B կետեր և նրա վրա չգտնվող P, Q և R կետեր: Օգտագործելով $\in$ և $\notin$ պայմանանշանները՝ նկարագրեք A, B, P, Q, R կետերի և a ուղղի փոխադարձ դասավորությունը:

2. ա) Նշեք երեք՝ A, B և C կետեր, որոնք չեն գտնվում մի ուղղի վրա, և տարեք AB, BC և CA ուղիղները:
բ) Տարեք երեք ուղիղ այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուր երկուսը հատվեն: Նշանակեք այդ ուղիղների բոլոր հատման կետերը: Քանի՞ հատման կետ է ստացվում: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

3. Թղթի վրա նշեք երկու կետ: ա) Չօգտվելով քանոնից՝ երրորդ կետն ընտրեք այնպես, որ այն գտնվի առաջին երկու կետերով անցնող ուղղի վրա: Քանոնով ստուգեք կառուցման ճշտությունը: Կրկնեք վարժությունը: բ) Չօգտվելով քանոնից՝ պատկերեք այդ կետերով անցնող ուղիղ: Քանոնի օգնությամբ ստուգեք կառուցման ճշտությունը: Կրկնեք վարժությունը:

4. Նշեք չորս՝ A, B, C, D կետեր այնպես, որ A, B, C կետերը գտնվեն մի ուղղի վրա, իսկ D կետը այդ ուղղի վրա չգտնվի: Յուրաքանչյուր երկու կետով տարեք ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ է ստացվում:

5. Տարեք a ուղիղ և նրա վրա նշեք A և B կետեր: Նշեք՝ ա) AB հատվածի վրա գտնվող M և N կետեր, բ) a ուղղի վրա գտնվող, բայց AB հատվածի վրա չգտնվող P և Q կետեր, գ) a ուղղի վրա չգտնվող R և S կետեր:

6. Տարեք ուղիղ և նրա վրա նշեք երեք կետ: Քանի՞ հատված է ստացվում ուղղի վրա:

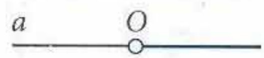
7. Նկար 10-ում պատկերված է ուղիղ, և նրա վրա նշված են A, B, C և D կետերը: Անվանեք բոլոր այն հատվածները՝ ա) որոնց վրա գտնվում է C կետը, բ)որոնց վրա B կետը չի գտնվում:

Նկ. 10

§2 ՃԱՌԱԳԱՅԹ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆ

3. Ճառագայթ

Տանենք a ուղիղ և նրա վրա նշենք մի O կետ (նկ. 11): Ուղիղն այդ կետով տրոհվում է երկու մասի: Այդ մասերից յուրաքանչյուրը կոչվում է *O կետից ելնող ճառագայթ* (նկ. 11-ում ճառագայթներից մեկը պատկերված է կապույտ գծով): Ճառագայթներից յուրաքանչյուրի համար O կետը կոչվում է *սկիզբ* կամ *սկզբնակետ*: Պայմանավորվենք ասել, որ սկզբնակետը չի ներառվում ճառագայթներից ոչ մեկում: Ճառագայթը, սովորաբար, նշանակվում է կամ լատինական մեկ փոքրատառով (օրինակ՝ *h ճառագայթը 12(ա) նկարում*), կամ լատինական երկու մեծատառով: Ընդ որում՝ մեծատառերից առաջին տառը նշանակում է ճառագայթի սկզբնակետը, իսկ երկրորդը՝ ճառագայթի վրա որևէ այլ կետ (օրինակ՝ *ճառագայթ OA-ն՝ 12(բ) նկարում*):



O կետը ուղիղը բաժանում է երկու ճառագայթի

Նկ. 11

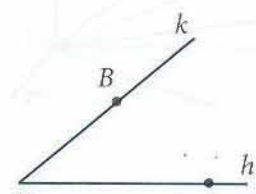
h ճառագայթ

OA ճառագայթ

Նկ. 12

4. Անկյուն

Անկյունը երկրաչափական պատկեր է, որը կազմված է կետից և նրանից ելնող երկու ճառագայթից: Այդ ճառագայթները կոչվում են *անկյան կողմեր*, իսկ նրանց ընդհանուր սկզբնակետը՝ *անկյան գագաթ*: Նկար 13-ում պատկերված է անկյուն՝ O գագաթով և h, k կողմերով: Անկյան կողմերի վրա նշված են A և B կետերը: Այդ անկյունը նշանակվում է այսպես՝ $\angle hk$, $\angle AOB$ կամ $\angle O$:



Անկյուն

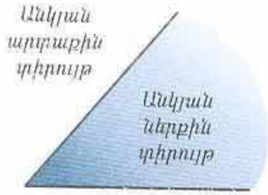
Նկ. 13

Եթե անկյան երկու կողմերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, ապա այն կոչվում է *փռված անկյուն*: Կարելի է ասել, որ փռված անկյան կողմերից յուրաքանչյուրը մյուս կողմի շարունակությունն է: Նկար 14–ում պատկերված է փռված անկյուն՝ C գագաթով և p, q կողմերով:

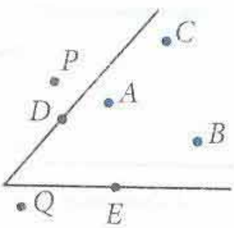
Փռված անկյուն

Նկ. 14

Յուրաքանչյուր անկյուն հարթությունը տրոհում է երկու մասի: Քննության առնենք նախ չփռված անկյունը: Եթե անկյունը փռված չէ, ապա հարթության տրոհված մասերից մեկը կոչվում է այդ անկյան *ներքին տիրույթ*, իսկ մյուսը՝ *արտաքին տիրույթ (նկ. 15(ա))*: 15(բ) նկարում պատկերված է չփռված անկյուն: A, B, C կետերը գտնվում են այդ անկյան ներսում, այսինքն՝ ներքին տիրույթում, D և E կետերը՝ անկյան կողմերի վրա, իսկ P և Q կետերը՝ անկյունից դուրս, այսինքն՝ անկյան արտաքին տիրույթում: Պատկերը մասամբ այլ է, եթե անկյունը փռված է: Այս դեպքում ներքին տիրույթ է համարվում հարթության տրոհված մասերից որևէ մեկը:



ա)

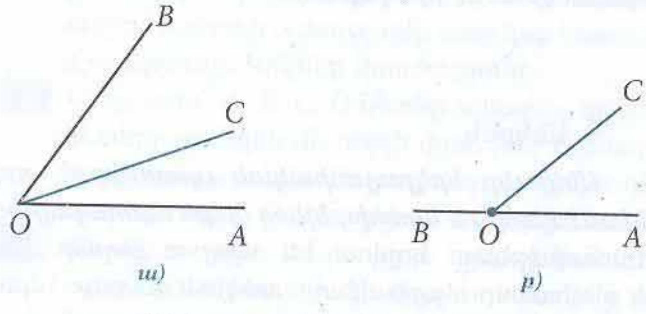


բ)

Նկ. 15

Անկյունից և նրա ներքին տիրույթից կազմված պատկերը ևս անվանում են անկյուն:

Անկյունը կարելի է տրոհել երկու անկյունների: Եթե անկյան գագաթից ելնող որևէ ճառագայթ անցնում է անկյան ներքին տիրույթով, ապա այդ ճառագայթը անկյունը տրոհում է երկու անկյան: 16(ա) նկարում OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու՝ AOC և COB անկյունների: Պարզ է, որ եթե AOB անկյունը փռված է, ապա OA և OB ճառագայթներին չհամընկնող յուրաքանչյուր OC ճառագայթ այդ փռված անկյունը տրոհում է երկու՝ AOC և COB անկյունների *(նկ. 16(բ))*:



OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու անկյան՝ $\angle AOC$ և $\angle COB$

Նկ. 16

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ ԵՎ ՀԱՐՑԵՐ

8. Տարեք որևէ ուղիղ, նրա վրա նշեք *A* և *B* կետեր, իսկ *AB* հատվածի վրա՝ *C* կետը: ա) Հետևյալ ճառագայթներից որո՞նք են համընկնում. *AB, BC, CA, AC, BA*: բ) Ո՞ր ճառագայթն է *CA* ճառագայթի շարունակությունը:

9. ա) Գծեք երեք չփռված անկյուններ և դրանք նշանակեք՝ $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$:
բ) Գծեք երկու փռված անկյուններ և դրանք նշանակեք տառերով:

10. Գծեք ընդհանուր սկիզբ ունեցող երեք ճառագայթ՝ *h, k, l*: Անվանեք բոլոր անկյունները, որոնք կազմվում են այդ ճառագայթներով:

11. Գծեք *hk* չփռված անկյուն: Նշեք երկու կետ՝ այդ անկյան ներսում, այդ անկյունից դուրս և անկյան կողմերի վրա:

12. Գծեք մի չփռված անկյուն: *A, B, M* և *N* կետերը նշեք այնպես, որ *AB* հատվածի բոլոր կետերը գտնվեն տվյալ անկյան ներսում, իսկ *MN* հատվածի բոլոր կետերը՝ անկյունից դուրս:

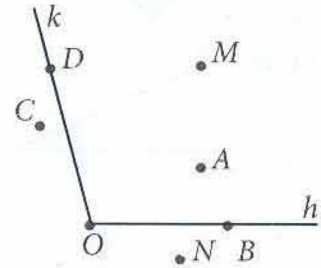
13. Գծեք որևէ անկյուն: Տարեք այնպիսի հատված. ա) որի բոլոր կետերը գտնվեն այդ անկյան ներքին տիրույթում, բ) որի բոլոր կետերը գտնվեն այդ անկյան արտաքին տիրույթում, գ) որի կետերի մի մասը գտնվի անկյան ներքին տիրույթում:

14. Գծեք *AOB* չփռված անկյունը և տարեք՝ ա) այնպիսի *OC* ճառագայթ, որն *AOB* անկյունը տրոհի երկու անկյան, բ) այնպիսի *OD* ճառագայթ, որն *AOC* անկյունը երկու անկյան չտրոհի:

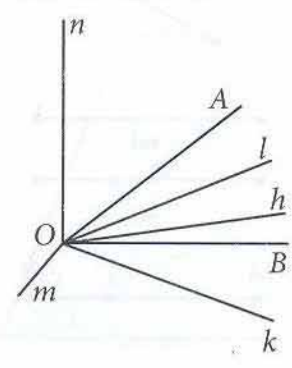
15. Երկու ուղիղների հատվելու դեպքում քանի՞ չփռված անկյուն է առաջանում:

16. Նկար 17-ում պատկերված կետերից որո՞նք են գտնվում *hk* անկյան ներսում, իսկ որո՞նք՝ այդ անկյունից դուրս:

17. Նկար 18-ում պատկերված ճառագայթներից որո՞նք են տրոհում *AOB* անկյունը երկու անկյան:



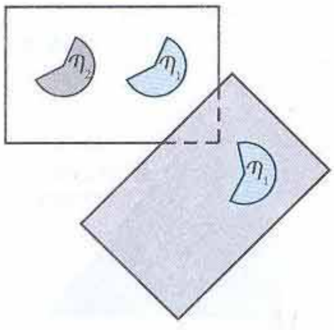
Նկ. 17



Նկ. 18

§3 ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒՄԸ

5. Երկրաչափական պատկերների հավասարությունը

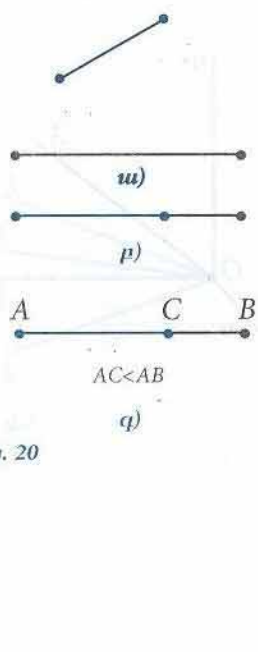


Նկ. 19

Մեզ շրջապատող առարկաների մեջ կան այնպիսինները, որոնց ձևերը միանման են, իսկ չափերը՝ միևնույնը: Այդպիսի առարկաներ են, օրինակ, թղթի երկու միատեսակ թերթերը, երկու նույնանուն գրքերը, նույն թողարկման երկու համակարգիչները: Երկրաչափության մեջ միևնույն ձևը և նույն չափերն ունեցող երկու պատկերներին անվանում են հավասար պատկերներ:

Նկար 19-ում պատկերված են $Պ_1$ և $Պ_2$ պատկերները: Որպեսզի բացահայտենք՝ արդյոք դրանք հավասար են, թե ոչ, վարվենք հետևյալ կերպ: $Պ_1$ պատկերը պատճենահանենք թափանցիկ թղթի վրա, և պատճենը տեղաշարժելով՝ վերադրենք $Պ_2$ պատկերի վրա՝ փորձելով համընկեցնել: Եթե $Պ_1$ պատկերի պատճենը և $Պ_2$ պատկերը համընկնում են, ապա $Պ_1$ և $Պ_2$ պատկերները հավասար են:

Այժմ կատարենք մի պարզաբանում: Կարող ենք ասել, որ $Պ_1$ պատկերը հավասար է իր պատճենին: Ուրեմն՝ կարելի է պատկերացնել, որ $Պ_2$ պատկերի վրա վերադրվում է ոչ թե $Պ_1$ պատկերի պատճենը, այլ հենց $Պ_1$ պատկերը: Այդ առումով հետագայում կխոսենք մի պատկերի վրա մյուս պատկերի (այլ ոչ նրա պատճենի) վերադրման մասին: Այսպիսով՝ ***երկու երկրաչափական պատկերներ կոչվում են հավասար, եթե վերադրումով դրանք կարող են համընկնել:***



Նկ. 20

6. Հատվածների և անկյունների համեմատումը

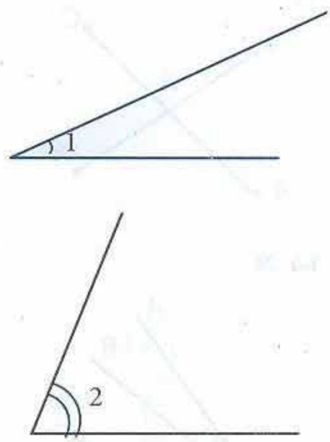
20(ա) նկարում պատկերված են երկու հատվածներ, և մեր խնդիրն է պարզել հավասա՞ր են դրանք, թե՞ ոչ: Այդ նպատակով հատվածներից մեկը վերադրենք մյուսի վրա այնպես, որ նրանցից մեկի ծայրը համընկնի մյուսի ծայրին *(նկ. 20(բ))*: Եթե այդ դեպքում համընկնում են նաև դրանց մյուս ծայրերը, ապա հատվածներն ամբողջությամբ համընկնում են և, ուրեմն, դրանք հավասար են: Իսկ եթե մյուս ծայրերը չեն համընկնում, ապա փոքր է համարվում այն հատվածը, որը մյուսի մի մասն է: 20(գ) նկարում AC հատվածը AB հատվածի մի մասն է, ուստի AC հատվածը փոքր է AB հատվածից (գրվում է այսպես՝ $AC < AB$):

Հատվածի այն կետը, որ կիսում է այդ հատվածը, այսինքն՝ այն տրոհում է երկու հավասար հատվածների, կոչվում է հատվածի *միջնակետ*: Նկար 21–ում C կետը AB հատվածի միջնակետն է:

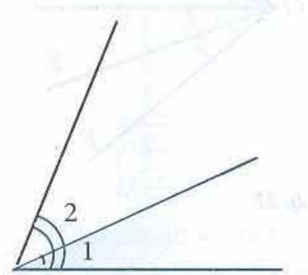
$AC = CB$
C կետը AB հատվածի միջնակետն է

Նկ. 21

22(ա) նկարում պատկերված են 1 և 2 չփռված անկյունները, և մեր խնդիրն է պարզել՝ հավասա՞ր են դրանք, թե՞ ոչ: Այդ նպատակով անկյուններից մեկը վերադրենք մյուսի վրա այնպես, որ նրանցից մեկի կողմը համընկնի մյուսի կողմին, իսկ երկրորդ կողմերն ընկնեն համընկնող կողմերի հանդեպ նույն ուղղության վրա *(նկ.22(բ))*: Եթե երկրորդ կողմերը ևս համընկնում են, ապա անկյուններն ամբողջությամբ համընկնում են, և, ուրեմն, դրանք հավասար են: Իսկ եթե այդ կողմերը չեն համընկնում, ապա փոքր է համարվում այն անկյունը, որը մյուսի մի մասն է: 22(բ) նկարում անկյուն 1–ը անկյուն 2–ի մի մասն է, ուստի $\angle 1 < \angle 2$:



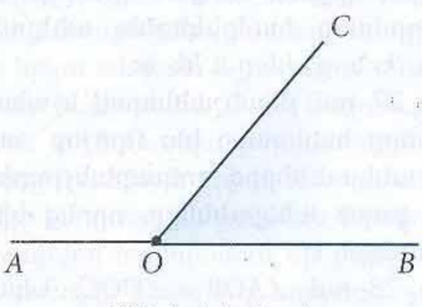
ա)



բ)

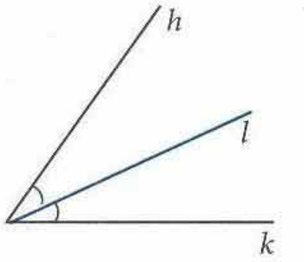
Նկ. 22

Չփռված անկյունը փռված անկյան մի մասն է *(նկ. 23)*, ուրեմն փռված անկյունը մեծ է չփռված անկյունից: Ակնհայտ է, *որ ցանկացած երկու փռված անկյուններ հավասար են:*



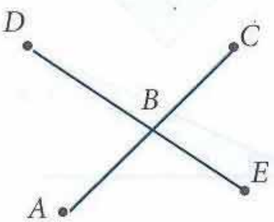
COB չփռված անկյունը
AOB փռված անկյան մի մասն է

Նկ. 23

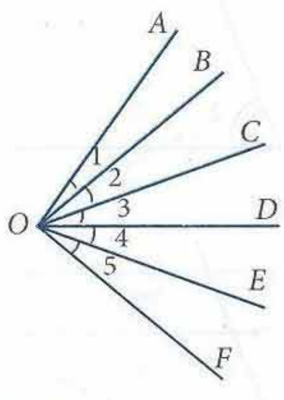


Նկ. 24

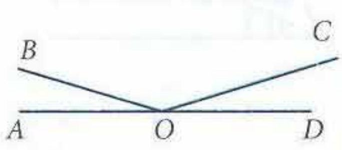
Նկ. 25



Նկ. 26



Նկ. 27



Նկ. 28

Անկյան գագաթից ելնող ճառագայթը, որն այն տրոհում է երկու հավասար անկյունների, կոչվում է անկյան կիսորդ:

Նկար 24–ում *l* ճառագայթը *hk* անկյան կիսորդն է:

Հարցեր և խնդիրներ

18. *O* սկզբնակետով ճառագայթի վրա նշված են *A*, *B* և *C* կետերն այնպես, որ *B* կետն ընկած է *O* և *A* կետերի միջև, իսկ A կետը՝ *O* և *C* կետերի միջև: Համեմատեք հետևյալ հատվածները՝ *OB* և *OA*, *OC* և *OA*, *OB* և *OC*:

19. *O* կետը *AB* հատվածի միջնակետն է: Կարելի՞ է վերադրմամբ համընկեցնել հետևյալ հատվածները. ա) *OA* և *OB*, բ) *OA* և *AB*:

20. Նկար 25–ում *AB*, *BC*, *CD* և *DE* հատվածները հավասար են: Որոշեք՝ ա) *AC*, *AE* և *CE* հատվածների միջնակետերը, բ) այն հատվածը, որի միջնակետը *D* կետն է, գ) այն հատվածները, որոնց միջնակետը *C* կետն է:

21. Նկար 26–ում $CB = BE$, $DE > AC$: Համեմատեք *AB* և *DB* հատվածները:

22. Համեմատեք B կետում հատվող *AC* և *DE* հատվածները, եթե $EB = BC$, $AB < BD$ (*նկ. 26*):

23. OC ճառագայթը տրոհում է AOB անկյունը երկու անկյան: Համեմատեք AOB և AOC անկյունները:

24. *l* ճառագայթը *hk* անկյան կիսորդն է: Կարելի՞ է վերադրմամբ համընկեցնել անկյունները՝ ա) *hl*–ը և *lk*–ն, բ) *hl*–ը և *hk*–ն:

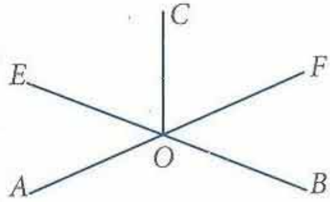
25. Նկար 27–ում թվանշաններով նշանակված անկյունները հավասար են: Որոշեք՝ ա)*AOC*, *BOF*, *AOE* անկյուններից յուրաքանչյուրի կիսորդը, բ)այն բոլոր անկյունները, որոնց կիսորդը OC ճառագայթն է:

26. Նկար 28–ում $\angle AOB = \angle DOC$: Նկարում կա՞ն, արդյոք, այլ հավասար անկյուններ:

27. *OA* և *OD* ճառագայթները միմյանց շարունակություններ են, և $\angle AOC = \angle DOB$ (*նկ. 28*): Այդ պատկերում կան, արդյոք, այլ հավասար անկյուններ:

28. Ուղղի վրա տրված են A, B, C և D կետեր (C կետը գտնվում է AB հատվածի վրա) այնպես, որ $AB = CD$: AD հատվածի միջնակետը արդյոք կլինի՞ CB հատվածի միջնակետ: Պատասխանը հիմնավորեք:

29. Նկար 29-ում $\angle AOC = \angle BOC$ և $\angle AOE = \angle BOF$: OC ճառագայթը EOF անկյան կիսորդ է, թե՞ ոչ:

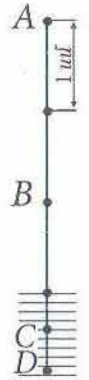


Նկ. 29

§4 ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

7. Հատվածի երկարությունը

Գործնական նպատակով հաճախ հարկ է լինում չափել հատվածներ, այսինքն՝ որոշել դրանց երկարությունները: Հատվածների չափման հիմքում ընկած է դրանց համեմատումը մեկ այլ հատվածի հետ, որը նախապես ընտրվում է որպես *չափման միավոր*: Վերջինս անվանում են նաև *մասշտաբային հատված*: Եթե որպես չափման միավոր է ընտրվում, ասենք, սանտիմետրը, ապա որևէ հատվածի երկարությունը որոշելու համար պարզում են, թե այդ հատվածում քանի անգամ է տեղավորվում սանտիմետրը: Նկար 30-ում պատկերված AB հատվածում սանտիմետրը տեղավորվում է ճիշտ երկու անգամ: Նշանակում է AB հատվածի երկարությունը հավասար է 2 սմ: Սովորաբար, համառոտ ասում են «AB հատվածը հավասար է 2 սմ», կամ «AB հատվածը 2 սմ է», և գրում. $AB = 2$ սմ:



$AB = 2$սմ, $AC = 3{,}4$ սմ,

$AD \approx 3{,}8$սմ

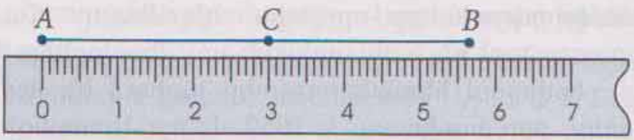
Նկ. 30

Հնարավոր է, որ որպես չափման միավոր ընտրված հատվածը չափվող հատվածում մի քանի անգամ տեղավորելիս ստացվի մնացորդ, այսինքն՝ չտեղավորվի ամբողջ թիվ անգամ: Այդ դեպքում չափման միավորը բաժանում են մի քանի հավասար մասերի և որոշում են, թե այդպիսի մի մասը քանի անգամ է տեղավորվում մնացորդում: Սովորաբար չափման միավորը բաժանում են 10 մասի: Օրինակ՝ նկար 30-ում պատկերված AC հատվածում սանտիմետրը տեղավորվում է 3 անգամ, իսկ մնացորդում սանտիմետրի տասներորդ մասը (միլիմետրը) տեղավորվում է ճիշտ 4 անգամ: Ուրեմն՝ AC հատվածի երկարությունը 3,4սմ է: Անշուշտ, հնարավոր է, որ միավորի վերցված մասը (մեր օրինակում՝ միլիմետրը), իր հերթին, մնացորդում ամբողջ թիվ անգամ չտեղավորվի, և առաջանա նոր մնացորդ: Այդպես է, օրինակ, նկար 30-ում AD հատվածի դեպքում: Նրանում սանտիմետրը երեք անգամ տեղավորվելիս առաջանում է մնացորդ, որում միլիմետրը տեղավորվում է ութ անգամ, և դարձյալ մնացորդ է ստացվում: Նման դեպքում ասում են, որ AD հատվածի երկարությունը մոտավորապես 3,8 սմ է: Սակայն այն ավելի ճշգրիտ չափելու համար միավորի նշված մասը (միլիմետրը) իր հերթին պետք է բաժանել 10 հավասար մասերի և շարունակել մնացորդի վրա տեղավորման ընթացքը: Հատվածի չափման նկարագրված ընթացքը կարող է շարունակվել և դարձյալ շարունակվել: Պարզ է, որ որքան շատ քայլեր ենք կատարում, այնքան ճշգրիտ կլինի մեր չափումը: Մտովի մենք կարող ենք նաև պատկերացնել, որ այդ քայլերը կարող են և չսպառվել: Գործնականում, սակայն, բավարարվում են որևէ քայլով և օգտվում հատվածի երկարության մոտավոր արժեքից:

Նշենք, որ իբրև չափման միավոր կարելի է ընդունել ոչ միայն սանտիմետրը, այլև ցանկացած մի ուրիշ հատված: ***Ընտրելով չափման միավորը՝ կարելի է չափել յուրաքանչյուր հատված, այսինքն՝ նրա երկարությունն արտահայտել որևէ դրական թվով:*** Այդ թիվը ցույց է տալիս, թե չափման միավորը (կամ նրա մասը) քանի անգամ է տեղավորվում չափվող հատվածում:

Եթե երկու հատվածները հավասար են, ապա չափման միավորը և նրա մասերը այդ հատվածներում տեղավորվում են նույնքան անգամ: Այսինքն՝ ***հավասար հատվածներն ունեն հավասար երկարություն:*** Իսկ եթե հատվածներից մեկը փոքր է մյուսից, ապա չափման միավորը և նրա մասերը փոքրի մեջ տեղավորվում են ավելի քիչ անգամ, քան մեծի մեջ: Այսինքն՝ ***հատվածներից փոքրի երկարությունը փոքր է:***

Նկար 31–ում պատկերված AB հատվածը C կետով տրոհվում է երկու հատվածի՝ AC և CB: Ինչպես տեսնում եք, $AC = 3$ սմ, $CB = 2{,}7$ սմ, $AB = 5{,}7$ սմ: Այսինքն՝ $AC + CB = AB$: Նմանապես բոլոր դեպքերում, ***եթե կետը տրոհում է հատվածը երկու հատվածների, ապա ամբողջ հատվածի երկարությունը հավասար է այդ երկու հատվածների երկարությունների գումարին:***



$AC + CB = AB$

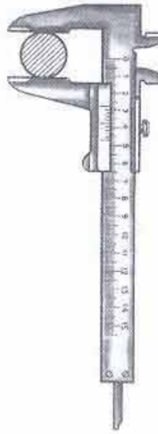
Նկ. 31

Հատվածի երկարությունը կոչվում է նաև այդ հատվածի ծայրակետերի *հեռավորություն*: Այլ խոսքով՝ ***երկու կետերի հեռավորությունը այն հատվածի երկարությունն է, որի ծայրակետերը այդ երկու կետերն են:***

8. Չափման միավորներ: Չափիչ գործիքներ

Հատվածների չափման և հեռավորությունների որոշման համար առօրյա գործերի մեջ օգտագործում են չափման տարբեր միավորներ: Տարբեր ժողովուրդներ, այդ թվում և հայերը, ժամանակին ունեցել են իրենց կողմից ընդունված միավորներ, ինչպես օրինակ՝ մատնաչափ, ոտնաչափ, քայլ և այլն[2]: Սակայն անհրաժեշտ էր ունենալ բոլորի կողմից ընդունված միանական չափման միավորներ: Որպես հատվածների չափման միջազգային միավոր՝ ընտրված է *մետրը*: Դա չափանմուշային մի հատված է, որը հավասար է երկրագնդի միջօրեականի $\frac{1}{40\,000\,000}$ մասին:

[2] Հանրահաշվի ձեր դասագրքում բերված են չափման միավորների հետաքրքիր աղյուսակներ:



Նկ. 32

Նկ. 33

Մետրի՝ հատուկ մետաղյա ձողի տեսքով պատրաստված չափանմուշը պահպանվում է Ֆրանսիայում՝ Չափերի և կշիռների միջազգային բյուրոյում, իսկ նրա պատճենը պահպանվում է նաև այլ երկրներում: Մեկ մետրը տասը դեցիմետր է, մեկ դեցիմետրը՝ տասը սանտիմետր, մեկ սանտիմետրը՝ տասը միլիմետր:

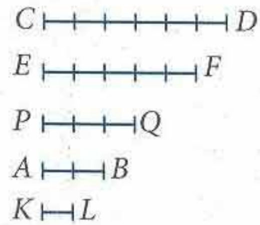
Չափման միավոր ընտրելիս ելնում են նպատակահարմարությունից՝ կախված չափվող հեռավորության բնույթից: Օրինակ՝ տետրում գծագրելիս հարմար է չափման միավոր ընտրել սանտիմետրը կամ միլիմետրը, շենքեր կառուցելիս՝ մետրը, իսկ բնակավայրերի հեռավորությունները որոշելիս՝ կիլոմետրը: Հաճախ օգտագործում են նաև չափման այլ միավորներ: Օրինակ՝ ծովերում հեռավորությունը չափում են *ծովային մղոնով*, որը հավասար է 1852 մետր: Աստղագիտության մեջ օգտագործում են *լուսատարին*. դա այն ճանապարհն է, որ լույսն անցնում է մեկ տարվա ընթացքում: Հայտնի են չափման այլ միավորներ ևս:

Առօրյա գործերի մեջ հեռավորություններ չափելիս օգտվում են տարբեր գործիքներից և սարքերից: Օրինակ՝ տեխնիկական գծագրության մեջ կիրառվում է *մասշտաբային միլիմետրական քանոնը*: Խողովակի տրամագիծը չափելիս օգտագործում են *ձողակարկին* *(նկ. 32)*, որի միջոցով հնարավոր է չափումներ կատարել 0,1 մմ ճշգրտությամբ: Տեղանքում չափումներ կատարելիս հարմար է օգտագործել *չափերիզը* *(նկ. 33)*, որը ներկայացնում է սանդղակային բաժանումներով ժապավեն: Կան բազմաթիվ չափիչ սարքեր, որոնք տեղադրվում են ավտոմեքենաների, նավերի և ինքնաթիռների վրա, և որոնցով չափվում են հեռավորությունները:

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

30 Չափեք երկրաչափության դասագրքի լայնությունն ու երկարությունը և դրանք արտահայտեք սանտիմետրերով և միլիմետրերով:

31. Չափելով երկրաչափության դասագրքի հաստությունը առանց շապիկի՝ գտեք մեկ թերթի հաստությունը:



Նկ. 34

32. Գտեք նկար 34–ում պատկերված բոլոր հատվածների երկարությունները, եթե որպես չափման միավոր է ընդունված՝ ա) KL հատվածը, բ) AB հատվածը:

33. Գծեք AB հատված և h ճառագայթ: h ճառագայթի վրա իր սկզբնակետից, առանց գործիքների (աչքաչափով), տեղադրեք հատվածներ, որոնց երկարությունները հավասար են՝ $2AB$, $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{4}AB$:

Օգտվելով մասշտաբային քանոնից՝ ստուգեք կառուցման ճշտությունը: Վարժությունը կրկնեք:

34. Գծեք ուղիղ և նրա վրա նշեք A և B կետեր: Մասշտաբային քանոնի օգնությամբ նշեք C և D կետերն այնպես, որ B կետը լինի AC հատվածի միջնակետը, իսկ D կետը՝ BC հատվածի միջնակետը:

35. Գծեք AB ուղիղ: Այդ ուղղի վրա մասշտաբային քանոնի օգնությամբ նշեք այնպիսի C կետ, որ $AC = 2$ սմ: Քանի՞ այդպիսի կետ է կարելի նշել AB ուղղի վրա:

Հարցեր և խնդիրներ

36. B կետը AC հատվածը տրոհում է երկու հատվածի: Գտեք AC հատվածի երկարությունը, եթե $AB = 7{,}8$ սմ, $BC = 25$ մմ:

37. B կետը AC հատվածը տրոհում է երկու հատվածի: Գտեք BC հատվածի երկարությունը, եթե՝ ա) $AB = 3{,}7$ սմ, $AC = 7{,}2$ սմ, բ) $AB = 4$ մմ, $AC = 4$ սմ:

38. A, B և C կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Հայտնի է, որ $AB = 12$ սմ, $BC = 13{,}5$ սմ: Որքա՞ն կարող է լինել AC հատվածի երկարությունը:

39. B, D և M կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Հայտնի է, որ $BD = 7$ սմ, $MD = 16$ սմ: Որքա՞ն կարող է լինել BM հեռավորությունը:

40. C կետը 64 սմ երկարությամբ AB հատվածի միջնակետն է: CA ճառագայթի վրա D կետը նշված է այնպես, որ $CD = 15$ սմ: Գտեք BD և DA հատվածների երկարությունները:

41. 8 դմ-ի հավասար MN հատվածի վրա՝ նրա C միջնակետի տարբեր կողմերում, նշված են A և B կետերն այնպես, որ $CA = 7$ սմ, $CB = 0{,}24$ մ: Գտեք AN և BN հատվածների երկարությունները՝ արտահայտված դեցիմետրերով:

42. 20 սմ երկարություն ունեցող AB հատվածի վրա նշված է D կետը: Գտեք AD և BD հատվածների երկարությունները, եթե BD հատվածը 4 սմ-ով երկար է AD հատվածից:

43. A, B և C կետերը արդյոք գտնվու՞մ են մի ուղղի վրա, եթե $AC = 5$ սմ, $AB = 3$ սմ, $BC = 4$ սմ:

Լուծում: Եթե A, B, C կետերը գտնվեն մի ուղղի վրա, ապա AB, AC և BC հատվածներից մեծը հավասար կլինի մյուս երկուսի գումարին: Ըստ պայմանի՝ ամենամեծ հատվածը՝ AC-ն, հավասար է 5 սմ, մինչդեռ մյուս երկուսի գումարը՝ $AB + BC$-ն, հավասար է 7 սմ: Հետևաբար՝ A, B և C կետերը մի ուղղի վրա չեն գտնվում:

44. C կետը AB հատվածի միջնակետն է, իսկ O կետը՝ AC հատվածի միջնակետը: ա) Գտեք AC-ն, CB-ն, AO-ն և OB-ն, եթե $AB = 2$ սմ: բ) Գտեք AB-ն, AC-ն, AO-ն և OB-ն, եթե $CB = 3{,}2$ մ:

45. D կետը գտնվում է AB հատվածի վրա, որի երկարությունը 14 սմ է: Գտեք AD հատվածի երկարությունը, եթե $DA = 3DB$:

46. Ուղղի վրա O, A և B կետերը նշված են այնպես, որ $OA = 12$ սմ, $OB = 9$ սմ: Գտեք OA և OB հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը, եթե O կետը՝ ա) գտնվում է AB հատվածի վրա, բ) չի գտնվում AB հատվածի վրա:

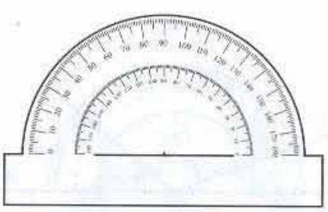
47. Հատվածը, որի երկարությունը a է, կամայական կետով տրոհված է երկու հատվածի: Գտեք այդ երկու հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

48. 28 սմ–ի հավասար հատվածը տրոհված է երեք անհավասար հատվածների: Եզրային հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը 16 սմ է: Գտեք միջտեղի հատվածի երկարությունը:

§5 ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

9. Անկյան աստիճանային չափը

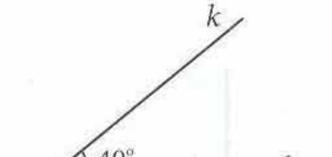
Անկյունների չափումը նման է հատվածների չափմանը. դրա հիմքում ընկած է անկյան համեմատումը մեկ այլ անկյան հետ, որն ընդունվում է որպես չափման միավոր: Որպես անկյունների չափման միավոր՝ սովորաբար ընդունված է *աստիճանը*: Աստիճանն այն անկյունն է, որը հավասար է փռված անկյան $\frac{1}{180}$ մասին: Անկյունների չափման այս միավորը ներմուծվել է շատ վաղուց՝ դեռևս մեր թվարկությունից առաջ:



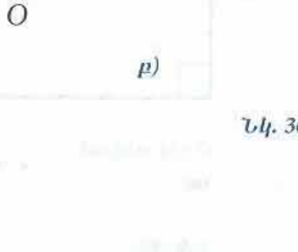
Անկյունաչափ

Նկ. 35

Այն դրական թիվը, որը ցույց է տալիս, թե աստիճանը և նրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում տրված անկյան մեջ, կոչվում է *անկյան աստիճանային չափ*: Անկյունները չափվում են *անկյունաչափի* օգնությամբ *(նկ. 35)*: 36(ա) նկարում պատկերված AOB անկյան աստիճանային չափը հավասար է 150°: Սովորաբար, համառոտ ասում են՝ «AOB անկյունը հավասար է 150°», կամ «AOB անկյունը 150° է», և գրում՝ $\angle AOB=150°$: 36(բ) նկարում hk անկյունը 40° է ($\angle hk=40°$):



ա)



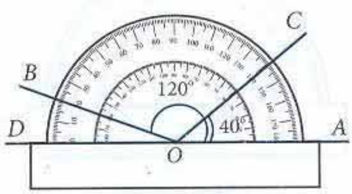
բ)

Նկ. 36

Աստիճանի $\frac{1}{60}$ մասը կոչվում է *րոպե*, իսկ րոպեի $\frac{1}{60}$ մասը՝ *վայրկյան*:

Րոպեն նշում են «′» նշանով, իսկ վայրկյանը՝ «″» նշանով: Օրինակ՝ «60 աստիճան, 32 րոպե և 17 վայրկյան» անկյունը նշանակվում է այսպես՝ $60°32'17''$:

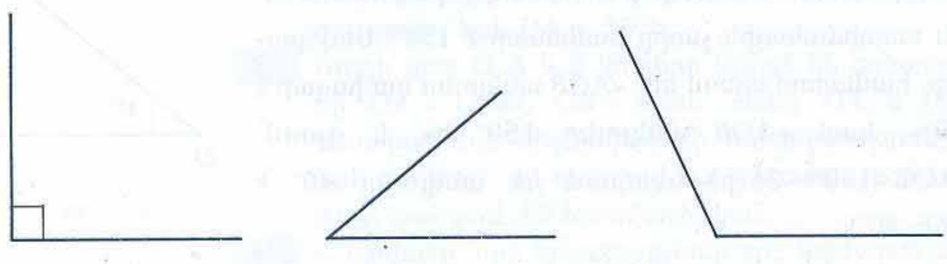
Եթե երկու անկյուններ հավասար են, ապա այդ անկյուններում տեղավորվում են հավասար թվով աստիճաններ (կամ աստիճանի մասեր): Այսինքն՝ ***հավասար անկյուններն ունեն հավասար աստիճանային չափ:*** Եթե անկյուններից մեկը փոքր է մյուսից, ապա աստիճանը (կամ նրա մասերը) փոքր անկյան մեջ տեղավորվում է ավելի քիչ անգամ, քան մեծի մեջ: Այսինքն՝ ***անկյուններից փոքրի աստիճանային չափը փոքր է:***



Նկ. 37

Քանի որ աստիճանը փռված անկյան $\frac{1}{180}$ մասն է, ուրեմն՝ ***փռված անկյունը 180° է:*** Չփռված անկյունը փոքր է 180°-ից, որովհետև այն փռված անկյունից փոքր է:

Նկար 37-ում պատկերված են O սկզբնակետով ճառագայթներ: Դրանցից OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու՝ AOC և COB անկյունների: Ինչպես տեսնում ենք, $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$: Այսպիսով՝ $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$: Մյուս բոլոր դեպքերում ևս, ***եթե ճառագայթը անկյունը տրոհում է երկու անկյան, ապա ամբողջ անկյան աստիճանային չափը հավասար է այդ երկու անկյունների աստիճանային չափերի գումարին:***



Ուղիղ անկյուն **ա)**   *Սուր անկյուն* **բ)**   *Բութ անկյուն* **գ)**

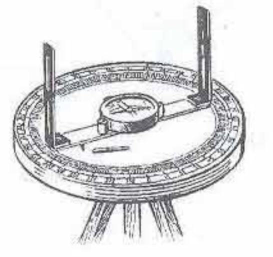
Նկ. 38

Անկյունը, որը հավասար է 90°, կոչվում է *ուղիղ անկյուն (նկ. 38(ա))*: Եթե անկյունը փոքր է 90°-ից, այսինքն՝ փոքր է ուղիղ անկյունից, այն կոչվում է *սուր անկյուն (նկ. 38(բ))*: Եթե անկյունը մեծ է 90°-ից, բայց փոքր է 180°-ից, այսինքն՝ մեծ է ուղիղ անկյունից և փոքր է փռված անկյունից, այն կոչվում է *բութ անկյուն (նկ. 38(գ))*:

Ուղիղ անկյուններ մեր շրջապատում տեսնում ենք հաճախ: Ուղիղ անկյուն են կազմում սենյակի պատերի և առաստաղի հատման գծերը, գրքի կամ տետրի եզրագծերը և այլն:

10. Անկյունների չափումը տեղանքում

Տեղանքում անկյունները չափում են հատուկ սարքերի օգնությամբ: Դրանցից պարզագույնն ունի *աստրոլյաբ* անվանումը *(նկ. 39)*: Այն կազմված է երկու մասից՝ աստիճանների բաժանված սկավառակից և սկավառակի կենտրոնի շուրջը պտտվող շարժաքանոնից: Շարժաքանոնի ծայրերին կան երկու դիտանցք, որոնք նախատեսված են որոշակի ուղղությամբ այն տեղակայելու համար:



Աստրոլյաբ

Նկ. 39

Տեղանքում *AOB* անկյունը չափելու համար աստրոլյաբին կցված եռոտանին տեղադրում են այնպես, որ սկավառակի կենտրոնից կախված ուղղալարը գտնվի հենց *O* կետի վրա: Հետո շարժաքանոնը տեղակայում են *OA* կամ *OB* կողմերից մեկի երկայնքով: Ապա նշում են այն բաժանումը, որի դիմաց գտնվում է շարժաքանոնի ցուցիչը: Այնուհետև պտտում են շարժաքանոնը՝ այն ուղղելով չափվող անկյան մյուս կողմի երկայնքով, և նշում այն բաժանումը, որի դիմաց գտնվում է շարժաքանոնի ցուցիչը: Ցուցմունքների տարբերությամբ էլ ստացվում է *AOB* անկյան աստիճանային չափը: Անկյունների չափումներ կատարվում են գիտության և տեխնիկայի տարբեր բնագավառներում: Օրինակ՝ աստղագիտության մեջ երկնային մարմինների դիրքերը որոշելիս մշտապես հարկ է լինում չափել տարբեր անկյուններ: Շատ կարևոր է անկյունները բավականաչափ ճշգրտորեն չափել, երբ հարկ է լինում որոշել արհեստական արբանյակների դիրքերը ուղեծրում: Այդ նպատակով նախագծվում և կառուցվում են հատուկ սարքեր: Դրանց օգնությամբ ստացված տվյալները հանգամանորեն մշակվում են էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաների (համակարգիչների) միջոցով:

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

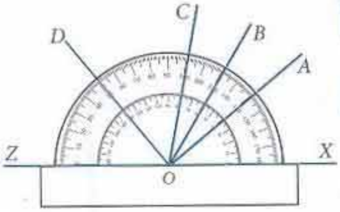
49. Գծագրեք *OA* ճառագայթ և անկյունաչափի օգնությամբ *OA* ճառագայթի մի կողմում տեղադրեք *AOB, AOC* և *AOD* անկյուններն այնպես, որ $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$:

50. Չօգտվելով անկյունաչափից՝ աչքաչափով գծագրեք 30°, 45°, 60°, 90° անկյուններ: Կառուցումը ստուգեք անկյունաչափի օգնությամբ: Կրկնեք վարժությունը:

51. Գծագրեք 70°-ին հավասար անկյուն և անկյունաչափի օգնությամբ տարեք նրա կիսորդը:

52. Գծագրեք *AOB* անկյուն և անկյունաչափի օգնությամբ *OC* ճառագայթը տարեք այնպես, որ *OA* ճառագայթը լինի *BOC* անկյան կիսորդը: Արդյո՞ք դա միշտ հնարավոր է:

Հարցեր և խնդիրներ



Նկ. 40

53. Երկու անկյան աստիճանային չափերը հավասար են: Արդյոք հավասա՞ր են այդ անկյունները:

54. Նկար 40-ում պատկերված են *O* ընդհանուր սկզբնակետով ճառագայթներ: ա) Գտեք *AOX, BOX, AOB, COB, DOX* անկյունների աստիճանային չափերը, բ) ո՞ր անկյուններն են հավասար 20°-ի, գ) ո՞ր անկյուններն են իրար հավասար, դ) թվարկեք *OA* կողմով անկյունները և գտեք դրանց աստիճանային չափերը:

55. *OE* ճառագայթը *AOB* անկյունը տրոհում է երկու անկյան: Գտեք $\angle AOB$-ն, եթե՝ ա) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$, բ) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$:

56. OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու անկյան: Գտեք COB անկյունը, եթե $\angle AOB = 78°$, իսկ AOC անկյունը 18°-ով փոքր է BOC անկյունից:

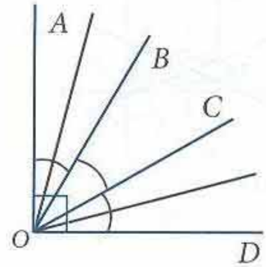
57. OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու անկյան: Գտեք AOC անկյունը, եթե $\angle AOB = 155°$, և AOC անկյունը 15°-ով մեծ է COB անկյունից:

58. AOB անկյունը AOC անկյան մասն է: Հայտնի է, որ $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\angle BOC$: Գտեք AOB անկյունը:

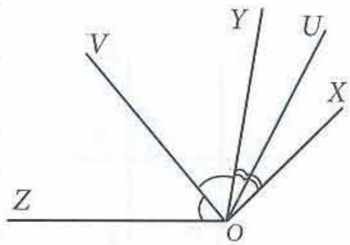
59. Նկար 41-ում AOD անկյունը ուղիղ է, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$: Գտեք այն անկյունը, որը կազմվում է AOB և COD անկյունների կիսորդներով:

60. Նկար 42-ում OV ճառագայթը ZOY անկյան կիսորդն է, իսկ OU ճառագայթը՝ XOY անկյան կիսորդը: Գտեք XOZ անկյունը, եթե $\angle UOV = 80°$:

61. l ճառագայթը hk չփռված անկյան կիսորդն է: hl անկյունը կարո՞ղ է, արդյոք, լինել ուղիղ կամ բութ:



Նկ. 41

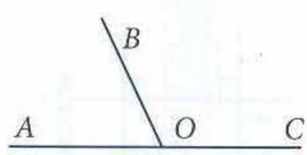


Նկ. 42

§6 ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

11. Կից և հակադիր անկյուններ

Երկու անկյուններ, որոնց մի կողմն ընդհանուր է, իսկ մյուս կողմերը մեկը մյուսի շարունակությունն են, կոչվում են կից անկյուններ: Նկար 43-ում AOB և BOC անկյունները կից են: Քանի որ OA և OC ճառագայթները կազմում են փռված անկյուն, ապա՝

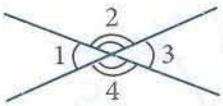


Նկ. 43

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°:$$

Այսպիսով՝ ***կից անկյունների գումարը 180° է:***

Երկու անկյուններ կոչվում են հակադիր, եթե անկ-



Նկ. 44

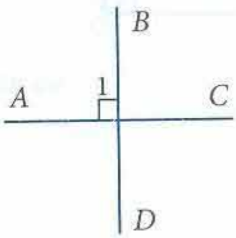
յուններից մեկի կողմերը մյուսի կողմերի շարունակու-թյունն են: Նկար 44-ում հակադիր են 1 և 3 անկյունները, ինչպես նաև 2 և 4 անկյունները:

Անկյուն 2-ը կից է ինչպես անկյուն 1-ին, այնպես էլ անկյուն 3-ին: Ըստ կից անկյունների հատկության՝ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ և $\angle 3 + \angle 2 = 180°$: Այստեղից ստանում ենք. $\angle 1 = 180° - \angle 2$ և $\angle 3 = 180° - \angle 2$: Իսկ սա նշանակում է, որ 1 և 3 անկյունների աստիճանային չափերը հավասար են: Դրանից հետևում է, որ իրենք՝ անկյունները, ևս հավասար են:

Այսպիսով՝ ***հակադիր անկյունները հավասար են:***

12. Ուղղահայաց ուղիղներ

Դիտարկենք երկու հատվող ուղիղներ *(նկ. 45)*: Նրանք կազմում են չորս չփռված անկյուններ, որոնք ունեն ընդհանուր գագաթ: Եթե դրանցից մեկը ուղիղ անկյուն է (անկյուն 1-ը *նկ. 45-ում*), ապա մյուս անկյունները ևս ուղիղ են: Դա կարող եք բացատրել ինքներդ՝ օգտվելով կից և հակադիր անկյունների հատկություններից:

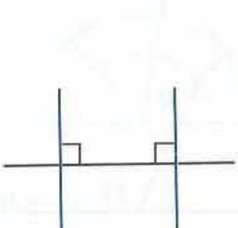


Նկ. 45

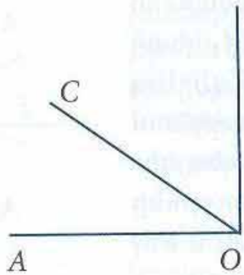
Երկու հատվող ուղիղներ կոչվում են ուղղահայաց (կամ փոխուղղահայաց), եթե նրանք կազմում են չորս ուղիղ անկյուններ:

AC և BD ուղիղների ուղղահայացությունը նշանակվում է այսպես. $AC \perp BD$: Այն կարդացվում է. «AC ուղիղն ուղղահայաց է BD ուղղին»:

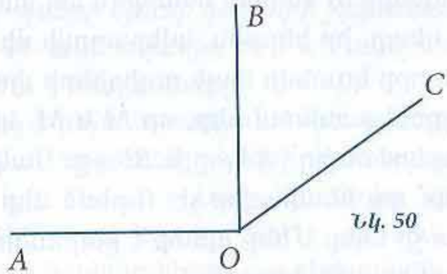
Նշենք, որ ***երկու ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են երրորդին, չեն հատվում*** *(նկ. 46(ա))*: Դրանում համոզվելու համար դիտարկենք AA_1 և BB_1 ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են PQ ուղղին *(նկ. 46(բ))*: Նկարը մտովի ծալենք PQ ուղղի երկայնքով այնպես, որ նկարի վերին մասը վերադրվի ներքևի մասի վրա: Քանի որ $\angle 1$-ը և $\angle 2$-ը ուղիղ և, ուրեմն, հավասար անկյուններ են, ապա PA ճառագայթը վերադրվում է PA_1 ճառագայթի վրա: Նմանապես՝ QB ճառագայթն էլ կվերադրվի QB_1 ճառագայթի վրա: Այժմ՝ եթե ենթադրենք, որ AA_1 և BB_1



ա)



Նկ. 49



Նկ. 50

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

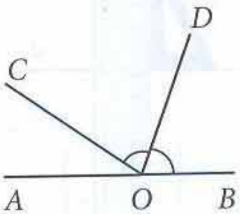
62. Գծագրեք AOB սուր անկյուն և OB ճառագայթի շարունակության վրա նշեք D կետը: Համեմատեք AOB և AOD անկյունները:

63. Գծագրեք երեք անկյուն՝ սուր, ուղիղ, բութ: Գծեք դրանց յուրաքանչյուրի կից անկյունը:

64. Գծագրեք չփռված hk անկյուն: h_1k_1 անկյունը կառուցեք այնպես, որ hk և h_1k_1 անկյունները լինեն հակադիր:

65. Գծագրեք MON չփռված անկյուն և նշեք P կետը անկյան ներսում, իսկ Q կետը՝ դրանից դուրս: Քանոնի և գծագրական անկյունաքանոնի օգնությամբ P և Q կետերով տարեք OM և ON ուղիղներին ուղղահայաց ուղիղներ:

Հարցեր և խնդիրներ



Նկ. 51

66. Գտեք ABC անկյան կից անկյունը, եթե՝ ա) $\angle ABC = 111°$, բ) $\angle ABC = 90°$, գ) $\angle ABC = 15°$:

67. Կից անկյուններից մեկը ուղիղ է: Սու՞ր, ուղի՞ղ, թե՞ բութ է մյուս անկյունը:

68. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը. եթե կից անկյունները հավասար են, ապա դրանք ուղիղ անկյուններ են:

69. Տրված են երկու հավասար անկյուններ: Հավասա՞ր են, արդյոք, դրանց կից անկյունները:

70. Գտեք hk և kl կից անկյունները, եթե՝ ա) $\angle hk$–ն $40°$–ով փոքր է $\angle kl$–ից, բ) $\angle hk$–ն $120°$–ով մեծ է $\angle kl$–ից, գ) $\angle hk$–ն $47°18'$–ով մեծ է $\angle kl$–ից, դ) $\angle hk = 3\angle kl$, ե) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$:

71. O կետից տարված են OA, OB և OC ճառագայթները, ընդ որում՝ $BO \perp AO$ (*նկ. 49*): AOB և BOC անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը $20°$ է: Գտեք BOC և AOC անկյունները:

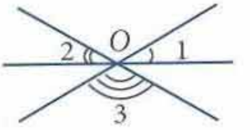
72. O կետից տարված են OA, OB և OC ճառագայթները, ընդ որում՝ $OB \perp OA$ (*նկ. 50*): AOB և BOC անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը $75°$ է: Գտեք BOC և AOC անկյունները:

73. Նկար 51–ում BOD և COD անկյունները հավասար են: Գտեք AOD անկյունը, եթե $\angle COB = 148°$:

74. Ըստ նկար 44–ի գտեք՝ ա) 1, 3, 4 անկյունները, եթե $\angle 2 = 117°$, բ) 1, 2, 4 անկյունները, եթե $\angle 3 = 43°27'$:

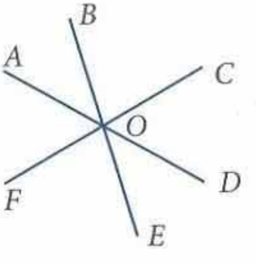
75. Գտեք երկու ուղիղների հատումից առաջացած չփռված անկյունները, եթե. ա) դրանցից երկուսի գումարը $114°$ է, բ) երեք անկյունների գումարը $220°$ է:

76. Ըստ նկար 44–ի՝ գտեք 1, 2, 3, 4 անկյունները, եթե. ա) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$, բ) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$, գ) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$:



Նկ. 52

77. Նկար 52–ում պատկերված են երեք ուղիղ, որոնք հատվում են O կետում: Գտեք անկյունների գումարը՝ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$:



Նկ. 53

78. Նկար 53–ում $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$: Գտեք AOC, BOD, COE և COD անկյունները:

79. a ուղիղը A անկյան կողմերը հատում է P և Q կետերում: Կարո՞ղ են, արդյոք, երկու՝ AP և AQ ուղիղներն էլ լինել a ուղղին ուղղահայաց:

80. a ուղղի վրա չգտնվող A կետով տարված են երեք ուղիղ, որոնք հատում են a ուղիղը: Ապացուցեք, որ տարված ուղիղներից առնվազն երկուսը ուղղահայաց չեն a ուղղին:

I ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Քանի՞ ուղիղ կարելի է տանել երկու կետով:
2. Քանի՞ ընդհանուր կետ կարող են ունենալ երկու ուղիղները:
3. Նկարագրեք, թե ինչ է հատվածը:
4. Բացատրեք, թե ինչ է ճառագայթը: Ինչպե՞ս են նշանակվում ճառագայթները:
5. Ո՞ր պատկերն է կոչվում անկյուն: Բացատրեք, թե ինչ է գագաթը, և ինչ են կողմերը:
6. Ո՞ր անկյունն է կոչվում փռված:
7. Ո՞ր պատկերներն են կոչվում հավասար:
8. Պարզաբանեք, թե ինչպես համեմատել երկու հատվածները:
9. Ո՞ր կետն է կոչվում հատվածի միջնակետ:
10. Պարզաբանեք, թե ինչպես համեմատել երկու անկյունները:
11. Ո՞ր ճառագայթն է կոչվում անկյան կիսորդ:
12. C կետը AB հատվածը տրոհում է երկու հատվածի: Ինչպե՞ս գտնել AB հատվածի երկարությունը, եթե հայտնի են AC և CB հատվածների երկարությունները:
13. Ի՞նչ գործիքներից են օգտվում հեռավորություններ չափելու համար:
14. Ի՞նչ է անկյան աստիճանային չափը:
15. OC ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու անկյան: Ինչպե՞ս գտնել AOB անկյան աստիճանային չափը, եթե հայտնի են AOC և COB անկյունների աստիճանային չափերը:
16. Ո՞ր անկյունն է կոչվում սուր, ուղիղ, բութ:
17. Ո՞ր անկյուններն են կոչվում կից: Ինչի՞ է հավասար կից անկյունների գումարը:
18. Ո՞ր անկյուններն են կոչվում հակադիր: Ի՞նչ հատկություն ունեն հակադիր անկյունները:
19. Ո՞ր ուղիղներն են կոչվում ուղղահայաց:
20. Պարզաբանեք, թե ինչու չեն հատվում այն երկու ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են երրորդին:
21. Ի՞նչ սարքեր են օգտագործվում տեղանքում ուղիղ անկյուններ կառուցելու համար:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

81. Նշեք չորս կետ այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուր երեքը մի ուղղի վրա չգտնվեն: Կետերի յուրաքանչյուր զույգով տարեք ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ է ստացվում:

82. Տրված են չորս ուղիղ, որոնցից յուրաքանչյուր երկուսը հատվում են: Քանի՞սն են հատման կետերը, եթե յուրաքանչյուր հատման կետով անցնում է միայն երկու ուղիղ:

83. Քանի՞ չփռված անկյուն է առաջանում միևնույն կետով անցնող երեք ուղիղների հատման դեպքում:

84. N կետը գտնվում է MP հատվածի վրա: M և P կետերի հեռավորությունը 24 սմ է, իսկ N և M կետերի հեռավորությունը՝ երկու անգամ մեծ, քան N և P կետերի հեռավորությունը: Գտեք՝ ա) N և P կետերի հեռավորությունը, բ) N և M կետերի հեռավորությունը:

85. AB հատվածի երկարությունը 14 սմ է, իսկ D կետը գտնվում է AB ուղղի վրա: Գտեք AD հեռավորությունը, եթե $DA = 3DB$:

86. Երեք կետ՝ K-ն, L-ը, M-ը, գտնվում են մի ուղղի վրա. $KL = 6$ սմ, $LM = 10$ սմ: Որքա՞ն կարող է լինել KM հեռավորությունը: Կատարեք գծագիր յուրաքանչյուր հնարավոր դեպքի համար:

87. a երկարությամբ AB հատվածը P և Q կետերով տրոհված է երեք՝ AP, PQ և QB հատվածների այնպես, որ $AP = 2PQ = 2QB$: Գտեք՝ ա) A կետի և QB հատվածի միջնակետի հեռավորությունը, բ) AP և QB հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

88. m երկարությամբ հատվածը բաժանված է՝ ա) երեք հավասար մասերի, բ) հինգ հավասար մասերի: Գտեք եզրային մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

89. 36 սմ երկարությամբ հատվածը տրոհված է չորս՝ միմյանց անհավասար մասերի: Եզրային մասերի միջնակետերի հեռավորությունը 30 սմ է: Գտեք մեջտեղի մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

90*. A, B և C կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, իսկ M, N կետերը AB և AC հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $BC = 2MN$:

91. Հայտնի է, որ $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$: Գտեք AOC անկյունը: Հնարավոր յուրաքանչյուր դեպքի համար կատարեք գծագիր՝ օգտվելով քանոնից և անկյունաչափից:

92. hk անկյունը $120°$ է, իսկ hm անկյունը՝ $150°$: Գտեք km անկյունը: Հնարավոր յուրաքանչյուր դեպքի համար կատարեք գծագիր:

93. Գտեք կից անկյունները, եթե՝ ա) նրանցից մեկը մյուսից մեծ է $45°$-ով, բ) նրանց տարբերությունը $35°$ է, գ) դրանց աստիճանային չափերը հարաբերում են, ինչպես $2 : 3$:

94. Գտեք կից անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը:

95. Ապացուցեք, որ հակադիր անկյունների կիսորդները գտնվում են մի ուղղի վրա:

96*. Ապացուցեք, որ եթե ABC և CBD անկյունների կիսորդները փոխուղղահայաց են, ապա A, B և D կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

97. Տրված են երկու՝ a և b, հատվող ուղիղներ և այդ ուղիղների վրա չգտնվող A կետը: A կետով տարված են m և n ուղիղներն այնպես, որ $m \perp a$ և $n \perp b$: Ապացուցեք, որ m և n ուղիղները չեն համընկնում:

* Այստեղ և հետագայում «աստղանիշով» նշված են ավելի դժվար խնդիրները:

ԳԼՈՒԽ II
Եռանկյուններ

§ 1 ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԻՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

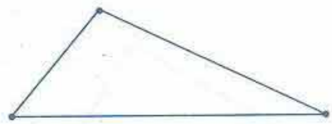
14. Եռանկյուն

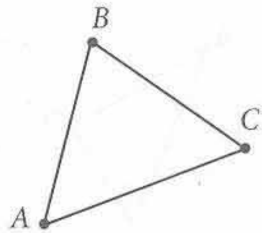
Նշենք մի ուղղի վրա չգտնվող որևէ երեք կետ և դրանք միացնենք հատվածներով *(նկ. 54(ա))*: Ստացվում է երկրաչափական մի պատկեր, որը կոչվում է *եռանկյուն*: Նշված երեք կետերը կոչվում են եռանկյան *գագաթներ*, իսկ հատվածները՝ *կողմեր*: 54(բ) նկարում պատկերված է եռանկյուն, որի գագաթներն են A-ն, B-ն, C-ն, իսկ կողմերը՝ AB-ն, BC-ն և CA-ն: Այդ եռանկյունը կնշանակենք $\triangle ABC$ և կկարդանք՝ «եռանկյուն ABC»: Այդ նույն եռանկյունը կարելի է նշանակել նաև այլ կերպ՝ ուրիշ կարգով գրելով A, B և C տառերը. $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ և այլն:

Երեք անկյունները՝ $\angle BAC$-ն, $\angle ABC$-ն և $\angle ACB$-ն, կոչվում են *եռանկյան անկյուններ*: Անկյունները նշանակվում են նաև մեկ տառով. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$:

Եռանկյան բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը կոչվում է նրա *պարագիծ*:

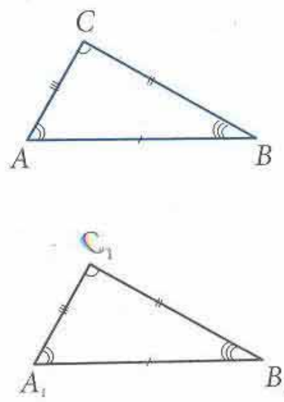
Հիշենք, որ երկու պատկերներ, այդ թվում՝ երկու եռանկյուններ, կոչվում են հավասար, եթե վերադրումով դրանք կարող են համընկնել: Նկար 55-ում պատկերված են ABC և $A_1B_1C_1$ հավասար եռանկյունները: Կարելի է այդ եռանկյուններից յուրաքանչյուրը մյուսի վրա այնպես վերադրել, որ դրանք ամբողջությամբ համընկնեն, այսինքն՝ դրանց բոլոր գագաթները և կողմերը զույգ առ զույգ համընկնեն: Պարզ է, որ այդ դեպքում եռանկյունների անկյունները ևս զույգ առ զույգ կհամընկնեն:


Եռանկյուն
ա)



A, B, C գագաթներով և AB, BC, CA կողմերով եռանկյուն
բ)

Նկ. 54



Նկ. 55

Այսպիսով՝ եթե երկու եռանկյուններ հավասար են, ապա նրանցից մեկի տարրերը, այն է՝ կողմերը և անկյունները, համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան տարրերին: Նշենք, որ ***հավասար եռանկյունների մեջ համապատասխանաբար հավասար*** (այսինքն՝ վերադրելիս համընկնող) ***կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ,*** և ընդհակառակը՝ ***համապատասխանաբար հավասար անկյունների դիմաց ընկած են հավասար կողմեր:***

Օրինակ՝ նկար 55–ում պատկերված ABC և $A_1B_1C_1$ հավասար եռանկյունների մեջ AB և A_1B_1 համապատասխանաբար հավասար կողմերի դիմաց ընկած են C և C_1 հավասար անկյունները:

ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների հավասարությունը նշանակվում է այսպես. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

Պարզվում է, որ երկու եռանկյունների հավասարությունը կարելի է բացահայտել առանց մեկը մյուսի վրա վերադրելու, այլ համեմատելով նրանց միայն որոշ տարրերը: Այդ հարցը, անշուշտ, մենք հետո կքննարկենք: Այժմ նկատենք, որ հաճախ անհնար է լինում եռանկյունների հավասարության բացահայտումը վերադրման միջոցով: Օրինակ՝ գործնականում անհնար է մեկը մյուսի վրա վերադրել երկու հողակտորները: Նմանապես շատ այլ դեպքեր կան, երբ եռանկյունների հավասարությունը հնարավոր է լինում որոշել՝ միայն չափելով և համեմատելով նրանց տարրերը:

15. Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը

Առկա գիտելիքների հիման վրա մենք հաճախ բացահայտում ենք նոր գիտելիքներ, հիմնավորում դրանց ճշմարիտ լինելը: Յուրաքանչյուր պնդում, որի ճշմարիտ լինելը հաստատվում է դատողությունների միջոցով, մաթեմատիկայում անվանում են *թեորեմ:* Այդպիսի դատողությունների ներկայացումը կոչվում է *թեորեմի ապացուցում:*

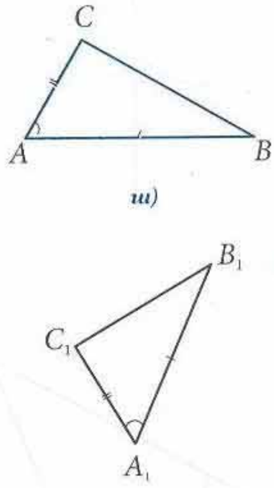
Մենք, փաստորեն, թեորեմների և դրանց ապացուցումների հետ արդեն առնչվել ենք: Այսպես, օրինակ, հակադիր անկյունների հավասարության մասին պնդումը հենց թեորեմ էր, իսկ դրա վերաբերյալ մեր բերած դատողություններն էլ դրա ապացուցումն էր: Այստեղ մենք կապացուցենք մի թեորեմ եռանկյունների հավասարության մասին:

Թեորեմ: ***Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը և դրանց կազմած անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմերին և դրանց կազմած անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները, որոնցում $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ *(նկ. 56)*: Ապացուցենք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, ապա կարելի է ABC եռանկյունը այնպես վերադրել $A_1B_1C_1$ եռանկյան վրա, որ A գագաթը համընկնի A_1 գագաթին, իսկ AB և AC կողմերը վերադրվեն համապատասխանաբար A_1B_1 և A_1C_1 ճառագայթների վրա: Եվ քանի որ $AB = A_1B_1$ և $AC = A_1C_1$, ուրեմն՝ AB կողմը համընկնում է A_1B_1 կողմին, իսկ AC կողմը՝ A_1C_1 կողմին: Այդ դեպքում համընկնում են, մասնավորապես, B և B_1 կետերը, C և C_1 կետերը: Հետևաբար՝ BC և B_1C_1 կողմերը համընկնում են: Այդպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն ամբողջությամբ համընկնում են, և, ուրեմն, նրանք հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմն արտահայտում է *հայտանիշ* (եռանկյունների երկուական կողմերի և դրանց կազմած անկյունների հավասար լինելը), ինչի հիման վրա կարելի է եզրակացնել եռանկյունների հավասարության մասին: Այն կոչվում է *եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշ*:



Նկ. 56

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

98. Գծագրեք եռանկյուն և նրա գագաթները նշանակեք M, N, P տառերով: ա) Թվարկեք եռանկյան բոլոր անկյուններն ու կողմերը: բ) Մասշտաբա-

յին քանոնի միջոցով չափեք կողմերը և գտեք եռանկյան պարագիծը:

99. Գծագրեք DEF եռանկյուն այնպես, որ E անկյունը լինի ուղիղ: Անվանեք՝ ա) D, E, F անկյունների հանդիպակաց կողմերը, բ) DE, EF, FD կողմերի հանդիպակաց անկյունները, գ) DE, EF, FD կողմերին առընթեր անկյունները:

100. Օգտագործելով անկյունաչափ և մասշտաբային քանոն՝ գծագրեք ABC եռանկյուն, որում՝
ա) $AB = 4{,}3$ սմ, $AC = 2{,}3$ սմ, $\angle A = 23°$,
բ) $BC = 9$ սմ, $BA = 6{,}2$ սմ, $\angle B = 122°$,
գ) $CA = 3$ սմ, $CB = 4$ սմ, $\angle C = 90°$:

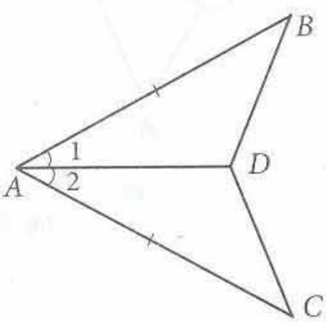
Հարցեր և խնդիրներ

101 ABC եռանկյան AB կողմը հավասար է 17 սմ, AC կողմը կրկնակի մեծ է AB կողմից, իսկ BC կողմը 10 սմ-ով փոքր է AC կողմից: Գտեք ABC եռանկյան պարագիծը:

102. Եռանկյան պարագիծը 48 սմ է, իսկ կողմերից մեկը՝ 18 սմ: Գտեք մյուս երկու կողմերը, եթե նրանց տարբերությունը 4,6 սմ է:

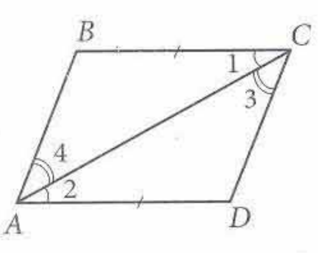
103. Եռանկյուններից մեկի պարագիծը մեծ է մյուսի պարագծից: Կարո՞ղ են, արդյոք, հավասար լինել այդ եռանկյունները:

104. AE և DC հատվածները հատվում են B կետում, որը նրանցից յուրաքանչյուրի միջնակետն է: ա) Ապացուցեք, որ ABC և EBD եռանկյունները հավասար են, բ) գտեք ABC եռանկյան A և C անկյունները, եթե BDE եռանկյան մեջ $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$:



Նկ. 57

105. Նկար 57-ում $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$: ա) Ապացուցեք, որ ABD և ACD եռանկյունները հավասար են, բ) գտեք BD-ն և AB-ն, եթե $AC = 15$ սմ, $DC = 5$ սմ:



Նկ. 58

106. Նկար 58-ում $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$: ա) Ապացուցեք, որ ABC և CDA եռանկյունները հավասար են, բ) գտեք AB-ն և BC-ն, եթե $AD = 17$ սմ, $DC = 14$ սմ:

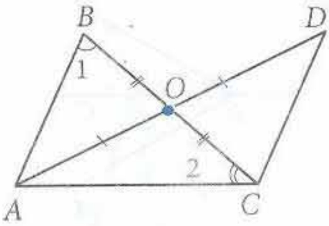
107. Նկար 59-ում $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$: ա) Ապացուցեք, որ AOB և DOC եռանկյունները հավասար են, բ) գտեք $\angle ACD$-ն:

108. AC և BD հատվածները հատվում և հատման կետում կիսվում են: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle CDA$:

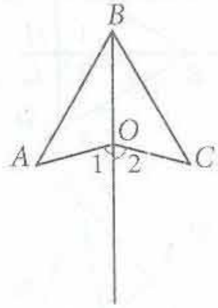
109. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$: AB և A_1B_1 կողմերի վրա P և P_1 կետերը նշված են այնպես, որ $AP = A_1P_1$: Ապացուցեք, որ $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$:

110. CAD անկյան կողմերի վրա նշված են B և E կետերն այնպես, որ B կետն ընկած է AC հատվածի վրա, իսկ E կետը՝ AD հատվածի վրա, ընդ որում՝ $AC = AD$ և $AB = AE$: Ապացուցեք, որ $\angle CBD = \angle DEC$:

111. Նկար 60-ում $AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$: Ապացուցեք, որ $AB = BC$:



Նկ. 59

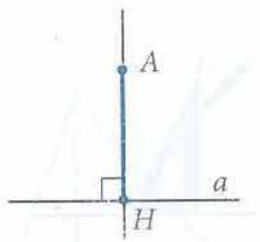


Նկ. 60

§2 ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋՆԱԳԾԵՐԸ, ԿԻՍՈՐԴՆԵՐԸ ԵՎ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

16. Ուղղին ուղղահայաց

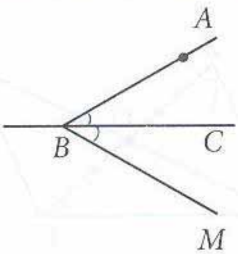
Դիտարկենք a ուղիղը և նրա վրա չգտնվող A կետը *(նկ. 61)*: A կետը և a ուղղի H կետը միացնենք հատվածով: Եթե a և AH ուղիղները փոխուղղահայաց են, ապա AH հատվածը կոչվում է *A կետից a ուղղին տարված ուղղահայաց*: H կետը կոչվում է *ուղղահայացի հիմք*:

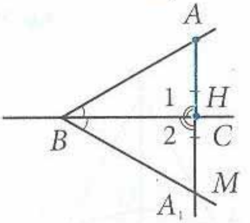


AH հատվածը a ուղղին ուղղահայաց է

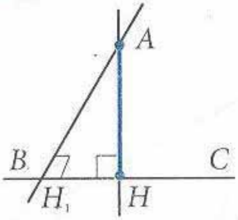
Նկ. 61

Թեորեմ: *Ուղղի վրա չգտնվող կետից այդ ուղղին կարելի է տանել ուղղահայաց, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

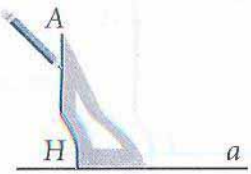




Նկ. 62



Նկ. 63



Նկ. 64

Ապացուցում: Դիցուք՝ A-ն BC ուղղի վրա չգտնվող կետ է *(նկ. 62)*: Նախ ապացուցենք, որ կարելի է տանել A կետից BC ուղղին ուղղահայաց:

BC ճառագայթի մյուս կողմում տեղադրենք ABC անկյանը հավասար MBC անկյունը, ինչպես ցույց է տրված 62(ա) նկարում: Քանի որ ABC և MBC անկյունները հավասար են, ապա նրանցից առաջինը կարելի է այնպես վերադրել երկրորդի վրա, որ առաջին անկյան BA և BC կողմերը համընկնեն երկրորդ անկյան BM և BC կողմերին: Այդ վերադրումը դիտողական ձևով կարելի է պատկերացնել որպես նկարի ծալում BC ուղղով: Այդ դեպքում A կետը վերադրվում է BM ճառագայթի ինչ-որ A_1 կետի վրա *(նկ. 62(բ))*: AA_1 և BC ուղիղների հատման կետը նշանակենք H տառով: Հենց AH հատվածն էլ կլինի BC ուղղին տարված՝ որոնելի ուղղահայացը: Բանն այն է, որ նշված վերադրման, այսինքն՝ թուղթը ծալելու դեպքում HA ճառագայթը համընկնում է HA_1 ճառագայթին, ուրեմն՝ անկյուն 1-ը կհամընկնի անկյուն 2-ին: Հետևաբար՝ $\angle 1 = \angle 2$: Բայց 1 և 2 անկյունները կից են, իսկ դա նշանակում է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը ուղիղ անկյուն է: Այսպիսով՝ $AH \perp BC$:

Այժմ ապացուցենք, որ A կետից կարելի է BC ուղղին տանել միայն մեկ ուղղահայաց:

Եթե ենթադրենք, թե A կետով կարելի է BC ուղղին տանել մեկ այլ՝ AH_1 ուղղահայաց ևս, ապա կստացվի, որ երկու՝ AH և AH_1 ուղիղները թեև ուղղահայաց են միևնույն BC ուղղին, բայց հատվում են *(նկ. 63)*:

Սակայն մենք արդեն գիտենք, որ դա անհնար է (այդ մասին տես §6-ի 12-րդ կետը): Նշանակում է՝ A կետից BC ուղղին կարելի է տանել միայն մեկ ուղղահայաց: Թեորեմն ապացուցված է:

Գծագրելիս կետից ուղղին ուղղահայաց տանելու համար օգտվում են անկյունաքանոնից կամ գծագրական անկյունաքանոնից *(նկ. 64)*:

17. Եռանկյան միջնագծերը, կիսորդները և բարձրությունները

Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի միջնակետին միացնող հատվածը կոչվում է եռանկյան միջնագիծ *(նկ. 65(ա)):*

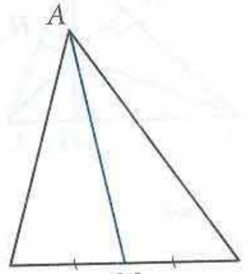
Յուրաքանչյուր եռանկյուն ունի երեք միջնագիծ: 65(բ) նկարում ABC եռանկյան միջնագծերն են AM_1, BM_2, CM_3 հատվածները:

Եռանկյան անկյան կիսորդի այն հատվածը, որ միացնում է գագաթն ու նրա հանդիպակաց կողմի կետը, կոչվում է եռանկյան կիսորդ *(նկ. 66(ա)):* Յուրաքանչյուր եռանկյուն ունի երեք կիսորդ: 66(բ) նկարում CDE եռանկյան կիսորդներն են՝ CC_1, DD_1, EE_1 հատվածները:

Եռանկյան գագաթից հանդիպակաց կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը կոչվում է եռանկյան բարձրություն *(նկ. 67):* Յուրաքանչյուր եռանկյուն ունի երեք բարձրություն: 68(ա),(բ),(գ) նկարներում ABC եռանկյան բարձրություններն են AH_1, BH_2, CH_3 հատվածները:

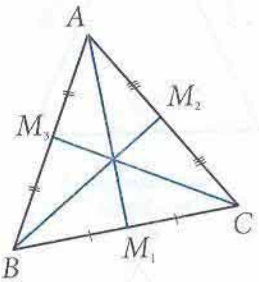
Եռանկյան միջնագծերը, կիսորդները և բարձրություններն ունեն նշանավոր հատկություններ: *Յուրաքանչյուր եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում (նկ. 65(բ)), կիսորդները ևս հատվում են մի կետում (նկ. 66(բ)), բարձրությունները կամ նրանց շարունակությունները նույնպես հատվում են մի կետում (նկ. 68(ա),(բ),(գ)):*

Այս կարևոր պնդումները մենք կապացուցենք հաջորդ դասարանում:



AM-ը եռանկյան միջնագիծն է

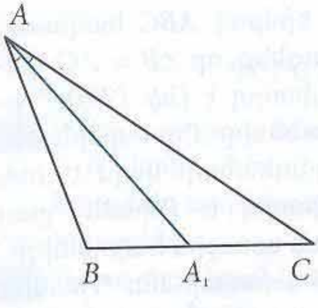
ա)



AM_1-ը, BM_2-ը, CM_3-ը ABC եռանկյան միջնագծերն են

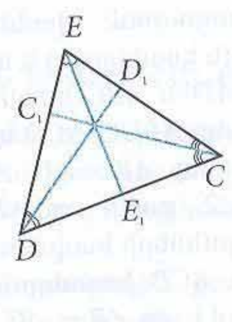
բ)

Նկ. 65



AA_1-ը ABC եռանկյան կիսորդն է

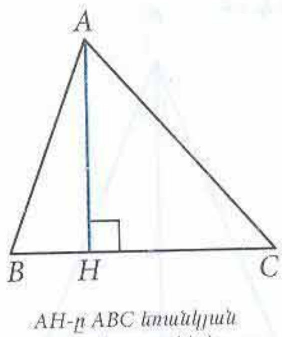
ա)



CC_1-ը, DD_1-ը, EE_1-ը CDE եռանկյան կիսորդներն են

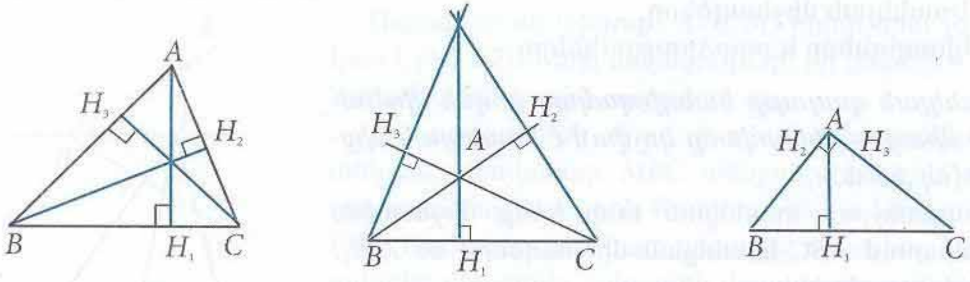
բ)

Նկ. 66



AH-ը ABC եռանկյան բարձրությունն է

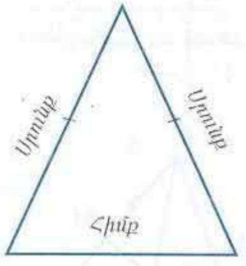
Նկ. 67



ա) բ) գ)

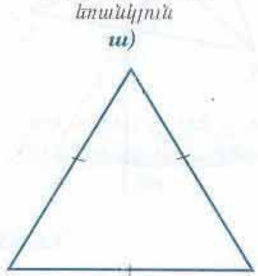
AH_1-ը, BH_2-ը, CH_3-ը ABC եռանկյան բարձրություններն են

Նկ. 68



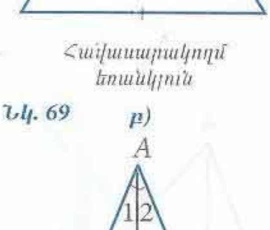
Հավասարասրուն եռանկյուն

ա)



Հավասարակողմ եռանկյուն

Նկ. 69 բ)



Նկ. 70

18. Հավասարասրուն եռանկյան հատկությունները

Եռանկյունը կոչվում է *հավասարասրուն,* եթե նրա երկու կողմերը հավասար են: Այդ հավասար կողմերը կոչվում են *սրունքներ,* իսկ երրորդ կողմը՝ հավասարասրուն եռանկյան *հիմք (նկ. 69(ա))*: Եռանկյունը, որի բոլոր կողմերը հավասար են, կոչվում է *հավասարակողմ (նկ. 69(բ))*:

Ապացուցենք երկու թեորեմ հավասարասրուն եռանկյան հատկությունների մասին:

Թեորեմ: ***Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են:***

Ապացուցում: Դիտենք BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունը և ապացուցենք, որ $\angle B = \angle C$: Դիցուք՝ AD–ն ABC եռանկյան կիսորդ է *(նկ. (70))*: Դիտարկենք ABD և ACD եռանկյունները: Ըստ պայմանի՝ նրանց մեջ $AB = AC$, AD–ն ընդհանուր կողմ է, իսկ $\angle 1 = \angle 2$, քանի որ AD–ն կիսորդ է: Ուրեմն՝ ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի՝ ABD և ACD եռանկյունները հավասար են: Դրանից հետևում է, որ $\angle B = \angle C$ (հիշենք, որ հավասար եռանկյունների մեջ համապատասխանաբար հավասար կողմերի հանդիպակաց անկյունները հավասար են): Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: ***Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը նաև միջնագիծ է և բարձրություն:***

Ապացուցում: Դարձյալ անդրադառնանք նկար 70-ին, որում ABC–ն BC հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն է, և AD–ն՝ նրա կիսորդը: ABD և ACD եռանկյունների հավասարությունից, ինչը նախորդ թեորեմի մեջ արդեն ապացուցել ենք, հետևում է, որ $BD = DC$ և $\angle 3 = \angle 4$: $BD = DC$ հավասարությունը նշանակում է, որ D կետը BC կողմի միջնակետն է, այսինքն՝ AD–ն ABC եռանկյան միջնագիծն է: Ինչ վերաբերում է անկյուններ 3–ին և 4–ին, դրանք կից են և իրար հավասար, ուրեմն՝ ուղիղ անկյուն են: Հետևաբար՝ AD հատվածը ABC եռանկյան բարձրություն է: Ստացվեց, որ AD կիսորդը և՛ միջնագիծ է, և՛ բարձրություն: Թեորեմն ապացուցված է:

Մենք բացահայտեցինք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը, միջնագիծը և բարձրությունը համընկնում են: Ուստի ճշմարիտ են նաև հետևյալ պնդումները.

1. ***Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը նաև միջնագիծ է և կիսորդ:***

2. ***Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագիծը նաև կիսորդ է և բարձրություն:***

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

112. Գծեք a ուղիղ և նրա տարբեր կողմերում նշեք A և B կետեր: Գծագրական անկյունաքանոնի օգնությամբ այդ կետերից տարեք a ուղղին ուղղահայացներ:

113. Գծագրեք եռանկյուն: Մասշտաբային քանոնի օգնությամբ նշեք կողմերի միջնակետերը և տարեք եռանկյան միջնագծերը:

114. Գծագրեք եռանկյուն: Անկյունաչափի և քանոնի օգնությամբ տարեք նրա կիսորդները:

115. Գծագրեք երեք սուր անկյուններով ABC եռանկյուն և MNP եռանկյուն՝ M բութ անկյունով: Գծագրական անկյունաքանոնի օգնությամբ տարեք այդ եռանկյուններից յուրաքանչյուրի բարձրությունները:

116. Գծագրեք հավասարասրուն եռանկյուն այնպես, որ հիմքի հանդիպակաց անկյունը լինի՝ ա) սուր, բ) ուղիղ, գ) բութ:

Խնդիրներ

117. A և C կետերը գտնվում են a ուղղի միևնույն կողմում: a ուղղին տարված AB և CD ուղղահայացները հավասար են: ա) Ապացուցեք, որ $\triangle ABD = \triangle CDB$, բ) գտեք $\angle ABC$–ն, եթե $\angle ADB = 44°$:

118. ABC եռանկյան AD միջնագիծը շարունակված է BC–ի մյուս կողմում DE հատվածով, որը հավասար է AD–ին, իսկ E կետը միացված է C կետին: ա) Ապացուցեք, որ $\triangle ABD = \triangle ECD$, բ) գտեք $\angle ACE$–ն, եթե $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$:

119. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը երկու անգամ փոքր է սրունքից, իսկ պարագիծը 50 սմ է: Գտեք եռանկյան կողմերը:

120. Բութանկյուն հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը 45 սմ է, իսկ նրա կողմերից մեկը մյուսից փոքր է 9 սմ–ով: Գտեք եռանկյան կողմերը:

121. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը 40 սմ է, իսկ BCD հավասարակողմ եռանկյան պարագիծը՝ 45 սմ: Գտեք AB և BC կողմերը:

122. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է AM միջնագիծը: Գտեք այդ միջնագիծը, եթե ABC եռանկյան պարագիծը 32 սմ է, իսկ ABM եռանկյան պարագիծը՝ 24 սմ:

123. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան միջնագիծը համընկնում է նրա բարձրությանը, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

124. Նկար 71–ում $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

125. Նկար 72–ում $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$: Գտեք $\angle 2$–ը:

126. M և P կետերը գտնվում են b ուղղի միևնույն կողմում: b ուղղին տարված MN և PQ ուղղահայացները հավասար են. O կետը NQ հատվածի միջնակետն է: ա) Ապացուցեք, որ $\angle OMP = \angle OPM$, բ) գտեք $\angle MON$–ը, եթե $\angle MOP = 105°$:

127. Ապացուցեք, որ հավասար եռանկյունների մեջ հավասար կողմերին տարված միջնագծերը հավասար են:

128. ABC եռանկյան AM միջնագիծը հավասար է BM հատվածին: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան անկյուններից մեկը հավասար է մյուս երկու անկյունների գումարին:

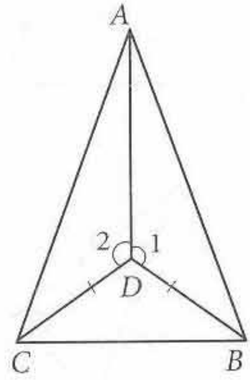
129. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան բոլոր անկյունները հավասար են:

130. Նկար 73–ում $AB = BC$, $CD = DE$: Ապացուցեք, որ $\angle BAC = \angle CED$:

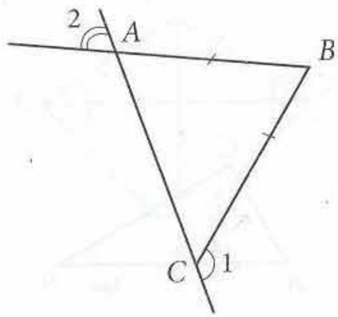
131. ABC հավասարասրուն եռանկյան BC հիմքի վրա M և N կետերը նշված են այնպես, որ $BM = CN$: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\triangle BAM = \triangle CAN$, բ) AMN եռանկյունը հավասարասրուն է:

132. DK հիմքով DEK հավասարասրուն եռանկյան մեջ EF հատվածը կիսորդ է, $DK = 16$ սմ, $\angle DEF = 43°$: Գտեք KF–ը, $\angle DEK$–ն, $\angle EFD$–ն:

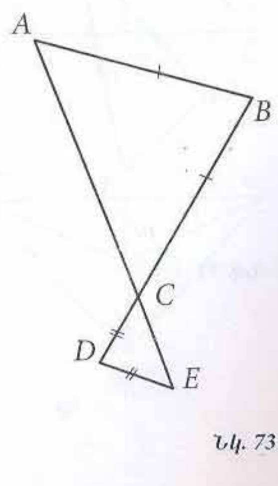
133. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է $БD$ միջնագիծը: AB և CB կողմերի վրա նշված են համապատասխանաբար E և F կետերն այնպես, որ $AE = CF$: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\triangle BDE = \triangle BDF$, բ) $\triangle ADE = \triangle CDF$:



Նկ. 71



Նկ. 72

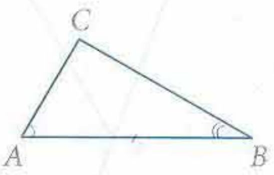


Նկ. 73

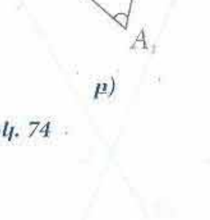
§3 ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՐՈՐԴ ԵՎ ԵՐՐՈՐԴ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

19. Եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշը

Թեորեմ: ***Եթե մի եռանկյան կողմն ու նրան առընթեր երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան կողմին և նրան առընթեր երկու անկյուններին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***



ա)



բ)

Նկ. 74

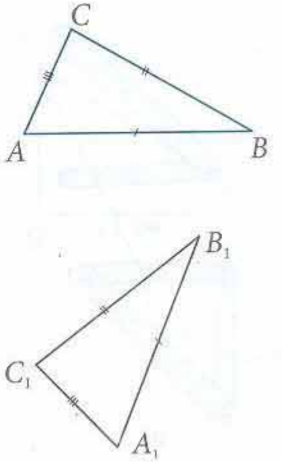
Ապացուցում: Դիտարկենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները, որոնց մեջ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (*նկ. 74*): Ապացուցենք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

ABC եռանկյունը $A_1B_1C_1$ եռանկյան վրա վերադրենք այնպես, որ A գագաթը համընկնի A_1 գագաթին, AB կողմը՝ իրեն հավասար A_1B_1 կողմին, իսկ C և C_1 գագաթները գտնվեն A_1B_1 ուղղի միևնույն կողմում:

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$, ապա AC կողմը վերադրվում է A_1C_1 ճառագայթի վրա, իսկ BC կողմը՝ B_1C_1 ճառագայթի վրա: Ուստի AC և BC կողմերի ընդհանուր կետը՝ C գագաթը, կգտնվի ինչպես A_1B_1 ճառագայթի, այնպես էլ A_1C_1 ճառագայթի վրա և, ուրեմն, կհամընկնի այդ ճառագայթների ընդհանուր կետին՝ C_1 գագաթին: Դա նշանակում է, որ AC կողմը համընկնում է A_1C_1 կողմին, իսկ BC կողմը՝ B_1C_1 կողմին: Այսպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն ամբողջությամբ համընկնում են և, հետևաբար, հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

20. Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշը

Թեորեմ: *Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:*



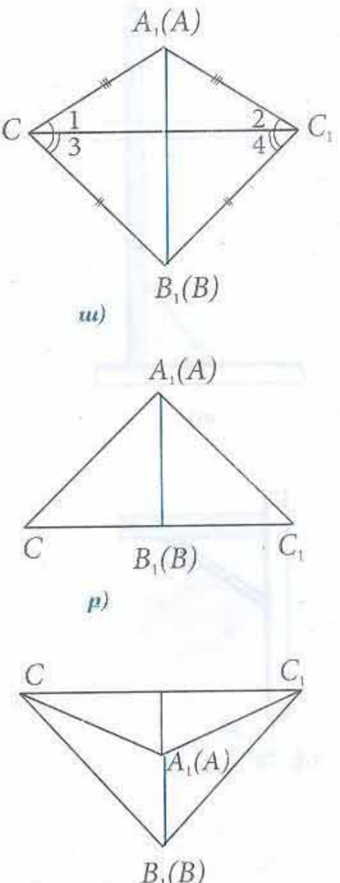
Նկ. 75

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները, որոնց մեջ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ *(նկ. 75)*: Ապացուցենք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

ABC եռանկյունը $A_1B_1C_1$ եռանկյանը կցենք այնպես, որ A գագաթը համընկնի A_1 գագաթին, B գագաթը՝ B_1 գագաթին, իսկ C և C_1 գագաթները հայտնվեն A_1B_1 ուղղի տարբեր կողմերում *(նկ. 76)*:

Հնարավոր է երեք դեպք. C_1C ճառագայթն անցնում է՝ 1) $A_1C_1B_1$ անկյան ներսով *(նկ. 76(ա))*, 2) այդ անկյան կողմերից մեկով *(նկ. 76(բ))*, 3) այդ անկյունից դուրս *(նկ. 76(գ))*: Այստեղ մենք քննության առնենք առաջին դեպքը, իսկ մյուս դեպքերը դուք կքննարկեք ինքնուրույն:

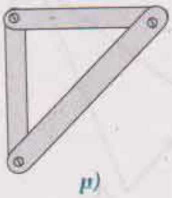
Քանի որ, ըստ թեորեմի պայմանի, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, ապա A_1C_1C և B_1C_1C եռանկյունները հավասարասրուն են *(տես նկ. 70(ա))*: Ըստ հավասարասրուն եռանկյունների անկյունների մասին թեորեմի՝ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$: Ուրեմն՝ $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$: Այսպիսով՝ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի՝ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 76

Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշից հետևում է, որ *եռանկյունը կոշտ պատկեր է*: Պարզաբանենք, թե դա ինչ է նշանակում: Պատկերացնենք երկու փայտաձող, որոնց մեկական ծայրերը մեխով ամրացված են իրար *(նկ. 77(ա))*: Այդպիսի կառուցվածքը կոշտ չէ. փայտաձողերի ազատ ծայրերը մոտեցնելով կամ իրարից հեռացնելով՝ մենք կարող ենք դրանց կազմած անկյունը փոխել: Այժմ վերցնենք ևս մեկ փայտաձող և նրա ծայրերն ամրացնենք նախորդ փայտաձողերի ազատ ծայրերին *(նկ. 77(բ))*: Ստացված կառուցվածքը, որը եռանկյուն է, արդեն կլինի կոշտ: Հնա-

ա)

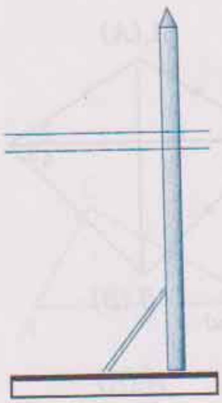


բ)

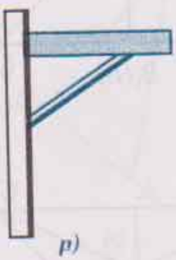
Նկ. 77

րավոր չէ դրա որևէ երկու կողմերը մոտեցնել կամ իրարից հեռացնել, այսինքն՝ անհնար է փոխել նրա որևէ անկյունը: Իսկապես, եթե դա հնարավոր լիներ, ապա մենք կստանայինք մի նոր եռանկյուն, որը հավասար չէ սկզբնականին: Իսկ դա անհնար է, քանի որ այդ նոր եռանկյունը և սկզբնական եռանկյունը պետք է լինեն հավասար՝ ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի:

Եռանկյունների կոշտության այդ հատկությունը լայն կիրառություն ունի գործնական խնդիրներում: Օրինակ՝ սյունը ուղղաձիգ դիրքով ամրացնելու համար նրան կցում են հենակ *(նկ. 78(ա))*: Նույն սկզբունքն է կիրառվում նաև բարձակը տեղադրելու դեպքում *(նկ. 78(բ))*:



ա)



բ)

Նկ. 78

Խնդիրներ

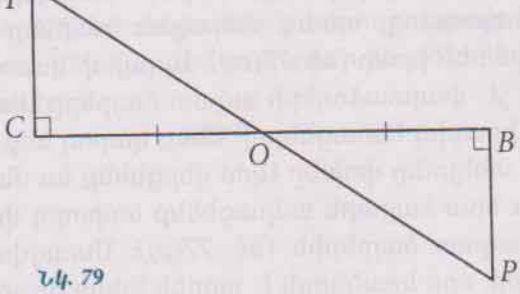
134. AB և CD հատվածները հատվում են AB հատվածի O միջնակետում, $\angle OAD = \angle OBC$: ա) Ապացուցեք, որ $\triangle CBO = \triangle DAO$, բ) գտեք BC-ն և CO-ն, եթե $CD=26$ սմ, $AD = 15$ սմ:

135. Նկար 58-ում $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$: ա)Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle CDA$, բ)գտեք AB-ն և BC-ն, եթե $AD = 19$ սմ, $CD = 11$ սմ:

136. A անկյան կիսորդի վրա D կետը, իսկ կողմերի վրա B և C կետերը նշված են այնպես, որ $\angle ADB = \angle ADC$: Ապացուցեք, որ $BD = CD$:

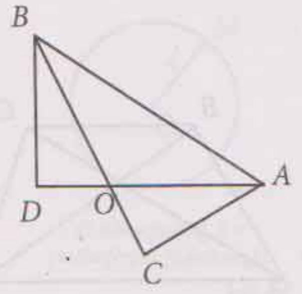
137. Ըստ նկար 79-ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ $OP = OT$, $\angle P = \angle T$:

138. Նկար 80-ում $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$: Ապացուցեք, որ $\angle C = \angle D$ և $AC = BD$:



Նկ. 79

139. Նկար 80–ում $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ սմ: Գտեք DB–ն:



Նկ. 80

140. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$: AB և A_1B_1 կողմերի վրա D և D_1 կետերը նշված են այնպես, որ $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$: Ապացուցեք, որ $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$:

141. Ապացուցեք, որ հավասար եռանկյունների մեջ համապատասխանաբար հավասար կողմերին տարած կիսորդները հավասար են:

142. AC և BD հատվածները հատվում են AC հատվածի O միջնակետում, $\angle BCO = \angle DAO$: Ապացուցեք, որ $\triangle BOA = \triangle DOC$:

143. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ CO և C_1O_1 հատվածները միջնագծեր են, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ և $\angle C = \angle C_1$: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$, բ) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$:

144. DEF և MNP եռանկյունների մեջ $EF = NP$, $DF = MP$ և $\angle F = \angle P$: E և D անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում, իսկ M և N անկյունների կիսորդները՝ K կետում: Ապացուցեք, որ $\triangle DOE = \angle MKN$:

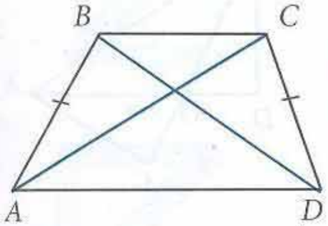
145. Ուղիղը, որն ուղղահայաց է A անկյան կիսորդին, անկյան կողմերը հատում է M և N կետերում: Ապացուցեք, որ AMN եռանկյունը հավասարասրուն է:

146. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան կիսորդը համընկնում է բարձրությանը, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

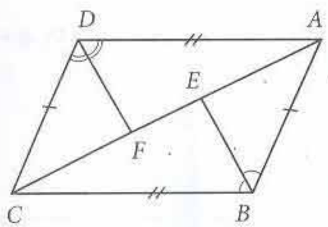
147. Ապացուցեք, որ եթե հավասարասրուն եռանկյուններից մեկի հիմքն ու նրան առընթեր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի հիմքին ու նրան առընթեր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

148. Ապացուցեք, որ եթե հավասարակողմ եռանկյուններից մեկի կողմը հավասար է մյուսի կողմին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

149. AC հատվածի վրա, իբրև հիմքի, նրա տարբեր կողմերում կառուցված են երկու հավասարասրուն եռանկյուններ՝ ABC և ADC: Ապացուցեք, որ $BD \perp AC$:



Նկ. 81



Նկ. 82

150. Նկար 57–ում *(էջ 36)* $AB = AC$, $BD = DC$ և $\angle BAC = 50°$: Գտեք $\angle CAD$–ն:

151. Նկար 58–ում *(էջ 36)* $BC = AD$, $AB = CD$: Ապացուցեք, որ $\angle B = \angle D$:

152. Նկար 81–ում $AB = CD$ և $BD = AC$: Ապացուցեք՝ ա) $\angle CAD = \angle ADB$, բ) $\angle BAC = \angle CDB$:

153. Նկար 82–ում $AB = CD$, $AD = BC$, BE–ն ABC անկյան կիսորդն է, իսկ DF–ը՝ ADC անկյան կիսորդը: Ապացուցեք՝ ա) $\angle ABE = \angle ADF$, բ) $\triangle ABE = \triangle CDF$:

154. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ BM և B_1M_1 միջնագծերը հավասար են. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

155. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ AD և A_1D_1 հատվածները կիսորդներ են, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ և $AD = A_1D_1$: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

156. ADC և CBD հավասարասրուն եռանկյուններն ունեն ընդհանուր հիմք՝ DC–ն: AB ուղիղը O կետում հատում է CD հատվածը: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\angle ADB = \angle ACB$, բ) $DO = OC$:

§4 ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ ԿԱՐԿԻՆՈՎ ԵՎ ՔԱՆՈՆՈՎ

21. Շրջանագիծ

Մեր գիտելիքներն արտահայտելիս հաճախ ձևակերպում ենք նախադասություններ, որոնց միջոցով պարզաբանվում են այս կամ այն անվանման կամ արտահայտության իմաստը: Նման իրավիճակներում գործ ենք ունենում սահմանման հետ: Սահմանման միջոցով բացահայտ նշվում են հետազոտվող առարկաների այն հատկությունները, որոնցով դրանք առանձնանում (սահմանազատվում) են ուրիշներից: Մենք արդեն բազմիցս գործ ենք ունեցել սահմանումների հետ: Օրինակ՝ անկյան, կից անկյունների, հավասարասրուն եռանկյան և այլնի անվանումներն առաջին անգամ ներմուծելիս մենք պարզաբանել ենք դրանց իմաստը, այսինքն՝ տվյալ հասկացությունները սահմանել ենք: Այստեղ գործ ենք ունենալու ևս մեկ սահմանման հետ:

Սահմանում

Շրջանագիծ կոչվում է այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է հարթության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա:

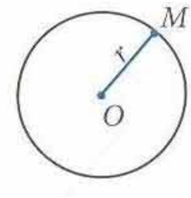
Տրված կետը կոչվում է շրջանագծի *կենտրոն*: Կենտրոնը շրջանագծի որևէ կետին միացնող հատվածը կոչվում է շրջանագծի *շառավիղ (նկ. 83)*: Սահմանումից հետևում է, որ շրջանագծի բոլոր շառավիղներն ունեն միևնույն երկարությունը:

Շրջանագծի երկու կետեր միացնող հատվածը կոչվում է *լար*: Շրջանագծի կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է *տրամագիծ*: Նկար 84–ում AB և EF հատվածները շրջանագծի լարեր են, իսկ CD հատվածը՝ տրամագիծ: Ակնհայտ է, որ *շրջանագծի տրամագիծը կրկնակի մեծ է շառավիղից:* Շրջանագծի կենտրոնը նրա տրամագծերից յուրաքանչյուրի միջնակետն է:

Շրջանագծի ցանկացած երկու կետեր շրջանագիծը տրոհում են երկու մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է շրջանագծի *աղեղ*: Նկար 85–ում ALB–ն և AMB–ն աղեղներ են, որոնք սահմանափակված են A և B կետերով:

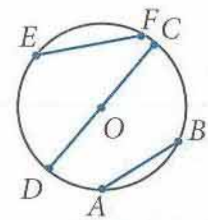
Գծագրի վրա շրջանագիծ պատկերելու համար օգտագործում են *կարկին (նկ. 86)*: Տեղանքում շրջանագիծ նշագծելու համար կարելի է օգտվել պարանից *(նկ. 87)*:

Հարթության այն մասը, որը սահմանափակված է շրջանագծով, կոչվում է շրջան *(նկ. 88)*: Ընդ որում՝ շրջանի մեջ ներառվում է նաև նրան եզերող շրջանագիծը:



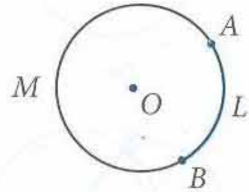
O կենտրոնով և r շառավիղով շրջանագիծ

Նկ. 83



AB-ն և EF-ը լարեր են, CD-ն տրամագիծ է

Նկ. 84



ALB-ն և AMB-ն շրջանագծի A և B կետերով սահմանափակված աղեղներ են

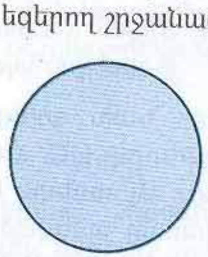
Նկ. 85

Շրջանագծի կառուցումը կարկինի օգնությամբ

Նկ. 86

Շրջանագծի կառուցումը պարանի օգնությամբ

Նկ. 87



Շրջան

Նկ. 88

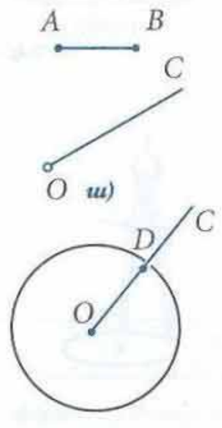
22. Կառուցումներ կարկինով և քանոնով

Երկրաչափական կառուցումներ մենք արդեն կատարել ենք. գծել ենք ուղիղներ, տեղադրել տրվածին հավասար հատվածներ, գծագրել անկյուններ, եռանկյուններ և այլ պատկերներ: Այդ ընթացքում օգտագործել ենք տարբեր գործիքներ՝ մասշտաբային բաժանումով քանոն, անկյունաչափ, կարկին, գծագրական անկյունաքանոն: Պարզվում է, որ երկրաչափական կառուցումներից շատերը կարելի է կատարել՝ օգտագործելով միայն կարկին և մասշտաբային բաժանում չունեցող քանոն: Այդ առումով էլ երկրաչափության մեջ հատուկ առանձնացվում են կառուցման այն խնդիրները, որոնք լուծվում են միայն այդ երկու գործիքի օգնությամբ: Իսկ ի՞նչ կարելի է անել դրանցով: Պարզ է, որ քանոնը թույլ է տալիս տանել կամայական ուղիղ, ինչպես նաև կառուցել ուղիղ, որն անցնում է տրված երկու կետով: Նշենք, որ քանոնով հնարավոր չէ հատվածներ չափել, քանի որ քանոնը մասշտաբային բաժանում չունի: Կարկինի օգնությամբ կարելի է տանել շրջանագիծ ինչպես կամայական շառավիղով, այնպես էլ տրված կենտրոնով և տրված հատվածին հավասար շառավիղով:

Կատարելով ահա այս պարզ գործողությունները՝ մենք կկարողանանք լուծել բազմաթիվ կառուցման խնդիրներ: Ասենք, որ դրանք շատ հետաքրքիր են և ենթադրում են յուրահատուկ հնարքներ: Կարևորն այն է, որ յուրաքանչյուր խնդրի համար հերթականությամբ նշենք հենց այն գործողությունները, որոնց արդյունքը հանգեցնում է այդ խնդրի լուծմանը:

Տրվածին հավասար հատվածի կառուցումը

Խնդիր: *Տրված ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից տեղադրել տրվածին հավասար հատված:*



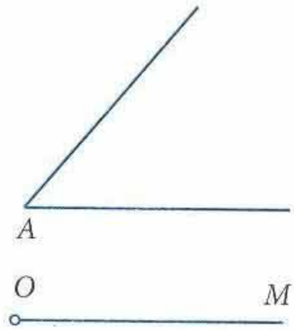
Նկ. 89

Լուծում: Նախ գծենք խնդրի պայմանում տրված պատկերները՝ OC ճառագայթը և AB հատվածը *(նկ. 89(ա))*: Այնուհետև կարկինին տանք AB հատվածին հավասար բացվածք և կառուցենք O կենտրոնով շրջանագիծ *(նկ. 89(բ))*: Այդ շրջանագիծը մի որոշակի D կետում հատում է OC ճառագայթը: OD հատվածը կլինի որոնելին:

Տրվածին հավասար անկյան կառուցումը

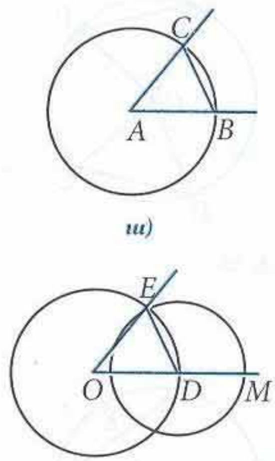
Խնդիր: *Տրված ճառագայթից տեղադրել տրվածին հավասար անկյուն:*

Լուծում: Տրված *OM* ճառագայթը և *A* գագաթով անկյունը պատկերված են նկար 90-ում: Պահանջվում է կառուցել անկյուն այնպես, որ այն հավասար լինի *A* անկյանը, և կողմերից մեկը համընկնի *OM* ճառագայթին:



Նկ. 90

Տանենք կամայական շառավիղով շրջանագիծ՝ որպես կենտրոն վերցնելով տրված A անկյան գագաթը: Այդ շրջանագիծը *B* և *C* կետերում հատում է անկյան կողմերը *(նկ. 91(ա))*: Այնուհետև տանենք նույն շառավիղով շրջանագիծ՝ որպես կենտրոն վերցնելով տրված *OM* ճառագայթի *O* սկզբնակետը: Այդ շրջանագիծը հատում է ճառագայթը *D* կետում *(նկ. 91(բ))*: Հետո կառուցենք *D* կենտրոնով շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է *BC* հատվածին: *O* և *D* կենտրոններով շրջանագծերը հատվում են երկու կետում: Այդ կետերից մեկը նշանակենք *E* տառով: Ապացուցենք, որ *MOE* անկյունը որոնելին է:

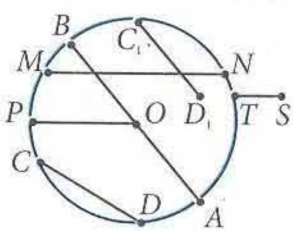


Նկ. 91

Դիտարկենք *ABC* և *ODE* եռանկյունները: *AB* և *AC* հատվածները *A* կենտրոնով շրջանագծի շառավիղներ են, իսկ *OD* և *OE* հատվածները՝ *O* կենտրոնով շրջանագծի շառավիղներ: Քանի որ այդ շրջանագծերը, ըստ կառուցման, ունեն հավասար շառավիղներ, ապա $AB = OD$, $AC = OE$: Դրա հետ մեկտեղ, նույնպես ըստ կառուցման, $BC = DE$: Հետևաբար՝ $\triangle ABC = \triangle ODE$ (ըստ երեք կողմի): Ուրեմն $\angle DOE = \angle BAC$, այսինքն՝ կառուցված *MOE* անկյունը, իրոք, հավասար է տրված *A* անկյանը:

Նույնպիսի կառուցում կարելի է կատարել տեղանքում, եթե կարկինի փոխարեն օգտագործվի պարան:

Հարցեր և խնդիրներ



Նկ. 92

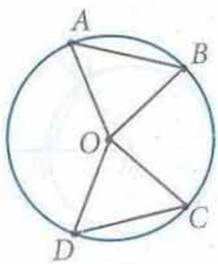
157. Նկար 92-ում պատկերված հատվածներից որո՞նք են՝ ա) շրջանագծի լար, բ) շրջանագծի տրամագիծ, գ) շրջանագծի շառավիղ:

158. *AB* և *CD* հատվածները շրջանագծի տրամագիծ են: Ապացուցեք, որ՝ ա) BD և AC լարերը հավասար են, բ) AD և BC լարերը հավասար են, գ) $\angle BAD = \angle BCD$:

159. MK հատվածը O կենտրոնով շրջանագծի տրամագիծ է, իսկ MP–ն և PK–ն այդ շրջանագծի հավասար լարեր են: Գտեք $\angle POM$–ը:

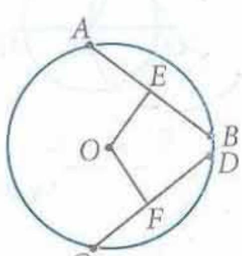
160. O կենտրոնով շրջանագծի վրա A և B կետերը նշված են այնպես, որ $\angle AOB$–ն ուղիղ անկյուն է: BC հատվածը շրջանագծի տրամագիծ է: Ապացուցեք, որ AB և AC լարերը հավասար են:

161. AB և CD հատվածները O կենտրոնով շրջանագծի տրամագծեր են: Գտեք AOD եռանկյան պարագիծը, եթե հայտնի է, որ $CB = 13$ սմ, $AB = 16$ սմ:



Նկ. 93

162. Նկար 93–ում AB և CD լարերը հավասար են: Ապացուցեք, որ $\angle AOB = \angle COD$:



Նկ. 94

163. Նկար 94–ում $AB = CD$, E և F կետերը AB և CD հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $OE = OF$:

164. Ուղղի վրա տրված են երկու կետ՝ A–ն և B–ն: BA ճառագայթի շարունակության վրա BC հատվածը տեղադրեք այնպես, որ $BC = 2AB$:

165. Տրված են a ուղիղը, նրա վրա չգտնվող B կետը և PQ հատվածը: M կետը a ուղղի վրա կառուցեք այնպես, որ $BM = PQ$: Խնդիրը արդյոք միշտ լուծում ունի:

166. Տրված են շրջանագիծը, նրա վրա չգտնվող A կետը և PQ հատվածը: M կետը շրջանագծի վրա կառուցեք այնպես, որ $AM = PQ$: Խնդիրը արդյոք միշտ լուծում ունի:

167. Տրված են BAC սուր անկյունը և XY ճառագայթը: Կառուցեք YXZ անկյունն այնպես, որ $\angle YXZ = 2\angle BAC$:

168. Տրված է AOB անկյունը: OX ճառագայթը կառուցեք այնպես, որ XOA և AOB անկյունները լինեն հավասար:

169. Տրված են a ուղիղը և նրա վրա չգտնվող M կետը: Կառուցեք M կետով անցնող շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է a ուղղի վրա: Խնդիրն ունի՞, արդյոք, միակ լուծում:

170. Տրված են շրջանագիծը և նրա վրա չգտնվող M կետը: Կառուցեք M կետով անցնող շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է տրված շրջանագծի վրա: Խնդիրն ունի՞, արդյոք, միակ լուծում:

171. Կառուցեք մի հատված, որի երկարությունը հավասար է տրված երկու հատվածների երկարությունների գումարին:

172. Տրված են երկու անհավասար հատվածներ: Կառուցեք մի շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է այդ հատվածների տարբերությանը:

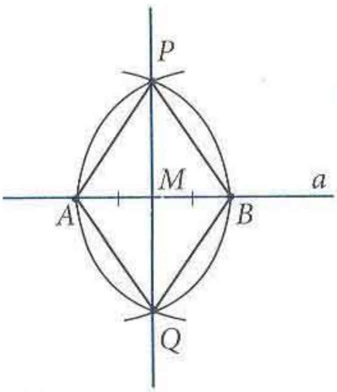
§5 ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

23. Կառուցման խնդիրների օրինակներ

Կառուցման խնդիրները առանձնահատուկ են նրանով, որ խնդրի պահանջը ներկայացնում է որոշակի պատկերի ստացում, և այն լուծելու համար անհրաժեշտ են գործիքներ: Եթե խնդրի պայմանում գործիքի մասին հատուկ չի նշվում, ապա ընդունում ենք, որ տրված գործիքները քանոնը և կարկինն են: Ընդ որում, ի տարբերություն գործնականում հանդիպող գործիքների, երկրաչափական կառուցումներում ընդունվում է, որ այդ գործիքներով կարելի է կառուցել անսահմանափակ մեծություն ունեցող պատկերներ: Կառուցման խնդիրներ լուծելիս կարևոր է հիշել, որ անհրաժեշտ է հաջորդաբար նշել այն բոլոր գործողությունները, որոնք կատարելիս հանգում ենք որոնելի պատկերի կառուցմանը:

Ուղղահայաց ուղիղների կառուցումը

Խնդիր: *Տրված են ուղիղը և նրա վրա մի կետ: Կառուցել այդ կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:*



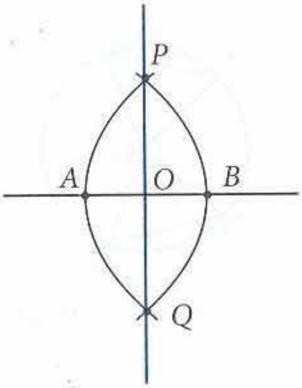
Նկ. 95

Լուծում: Տրված *a* ուղղի վրա վերցված *M* կետից ելնող ճառագայթների վրա տեղադրենք հավասար հատվածներ՝ *MA*–ն և *MB*–ը *(նկ. 95)*: Այնուհետև կառուցենք *AB* շառավղով, *A* և *B* կենտրոններով երկու շրջանագիծ: Այդ շրջանագծերը հատվում են երկու՝ *P* և *Q* կետերում: M կետով և այդ կետերից մեկով տանենք ուղիղ, օրինակ՝ *MP* ուղիղը *(տես նկ. 95)*: Ապացուցենք, որ այդ ուղիղը որոնելին է:

Իսկապես, քանի որ *PAB* եռանկյունը հավասարասրուն է, և *PM*–ը այդ եռանկյան միջնագիծն է, ուրեմն այն նաև բարձրությունն է: Այսինքն՝ $PM \perp a$:

Հատվածի միջնակետի կառուցումը

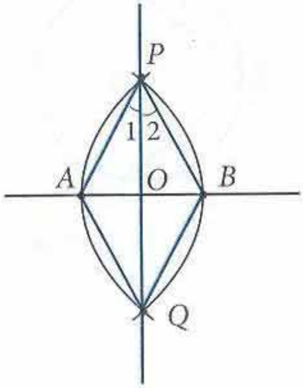
Խնդիր: *Կառուցել տրված հատվածի միջնակետը:*



Նկ. 96

Լուծում: Դիցուք *AB*–ն տրված հատվածն է: Կառուցենք *A* և *B* կենտրոններով և *AB* շառավղով երկու շրջանագիծ *(նկ. 96)*: Այդ շրջանագծերը հատվում են *P* և *Q* կետերում: Տանենք *PQ* ուղիղը: Այդ ուղղի և *AB* հատվածի հատման *O* կետը *AB* հատվածի որոնելի միջնակետն է:

Իսկապես, *APQ* և *BPQ* եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմի: Ուստի $\angle 1 = \angle 2$ *(նկ. 97)*: Հետևաբար՝ *PO* հատվածը *APB* հավասարասրուն եռանկյան կիսորդ է և, ուրեմն, նաև միջնագիծ: Այսինքն՝ *O* կետը *AB* հատվածի միջնակետն է:



Նկ. 97

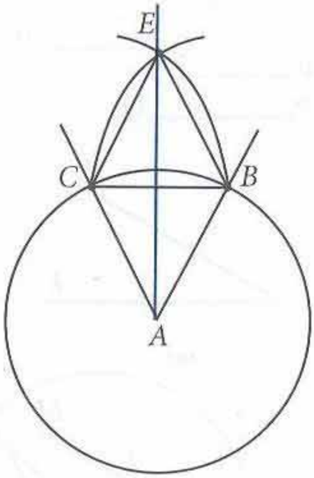
Խնդրի լուծումն ավարտված է, սակայն մենք շարունակենք դիտարկումը: Նկատենք, որ կառուցված *PQ* ուղիղը, որն անցնում է *AB* հատվածի միջնակետով, նաև ուղղահայաց է *AB* հատվածին, այսինքն՝ այն *AB* հատվածի միջնուղղահայացն է:

Այսպիսով՝ մենք գիտենք կառուցել նաև տրված հատվածի միջնուղղահայացը. դրա համար հարկավոր է կատարել այն գործողությունները, ինչ տրված հատվածի միջնակետը կառուցելիս:

Անկյան կիսորդի կառուցումը

Խնդիր: *Կառուցել տրված անկյան կիսորդը:*

Լուծում: Կառուցենք կամայական շառավիղով շրջանագիծ՝ որպես կենտրոն վերցնելով տրված A անկյան գագաթը: Այդ շրջանագիծը B և C կետերում հատում է անկյան կողմերը *(նկ. 98)*: Այնուհետև տանենք միևնույն BC շառավիղով երկու շրջանագիծ՝ որպես կենտրոններ վերցնելով B և C կետերը (նկարում պատկերված են այդ շրջանագծերի միայն մի մասերը): Այդ շրջանագծերը հատվում են երկու կետում: Կետերից մեկը, որն ընկած է BAC անկյան ներսում, նշանակենք E տառով: Տանենք AE ճառագայթը և ապացուցենք, որ այն տրված անկյան կիսորդն է:



Նկ. 98

Դիտարկենք ACE և ABE եռանկյունները: Ըստ երեք կողմի՝ այդ եռանկյունները հավասար են: Իսկապես, AE–ն ընդհանուր կողմ է: AC–ն և AB–ն, որպես միևնույն շրջանագծի շառավիղներ, հավասար են, իսկ ըստ կառուցման՝ $CE=BE$: ACE և ABE եռանկյունների հավասարությունից բխում է, որ $\angle CAE = \angle BAE$, այսինքն՝ AE ճառագայթը, իրոք, տրված անկյան կիսորդն է:

Պարզաբանում: Կարելի՞ է, արդյոք, տրված անկյունը քանոնի և կարկինի օգնությամբ բաժանել երկու հավասար անկյունների: Պարզ է, որ կարելի է. դրա համար բավական է տանել այդ անկյան կիսորդը: Տրված կամայական անկյունը կարելի է բաժանել նաև չորս հավասար անկյունների: Դրա համար հարկավոր է նախ՝ այդ անկյունը կիսել, իսկ հետո՝ դարձյալ կիսել բաժանումից ստացված անկյուններից յուրաքանչյուրը: Հարց է ծագում. կարելի՞ է, արդյոք, տրված անկյունը քանոնի և կարկինի օգնությամբ բաժանել երեք հավասար անկյունների: Այս խնդիրը, որ հայտնի է *«Անկյան եռատման խնդիր»* անունով, դարեր շարունակ զբաղեցրել է մաթեմատիկոսներից շատերի ուշադրությունը: Ի վերջո՝ երկար որոնումներից հետո՝ 19–րդ դարում, ապացուցվել է, որ այդպիսի կառուցումը ոչ բոլոր անկյունների համար է հնարավոր:

24. Եռանկյան կառուցումն ըստ երեք տարրերի

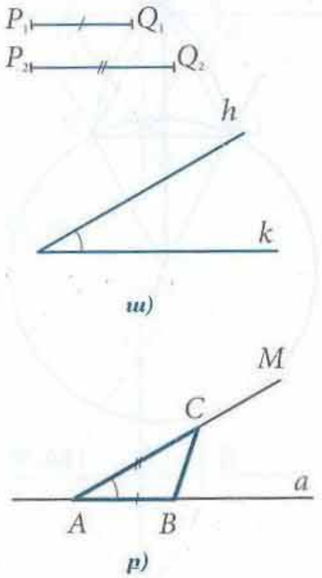
Խնդիր 1: *Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմի և նրանցով կազմված անկյան:*

Լուծում: Նախ ճշտենք, թե ինչպես պետք է հասկանալ այս խնդիրը, այսինքն՝ ինչ է տրված, և ինչ է պետք կառուցել: Տրված են P_1Q_1, P_2Q_2 հատվածները և hk անկյունը *(նկ. 99(ա))*: Պահանջվում է կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել այնպիսի ABC եռանկյուն, որի երկու կողմերը, ասենք՝ AB–ն և AC–ն, հավասար են տրված P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածներին, իսկ այդ կողմերի կազմած A անկյունը՝ տրված hk անկյանը:

Տանենք a ուղիղ և նրա վրա կարկինի օգնությամբ տեղադրենք P_1Q_1 հատվածին հավասար AB հատվածը *(նկ. 99(բ))*: Այնուհետև կառուցենք տրված hk անկյանը հավասար BAM անկյունը (մենք արդեն գիտենք, թե դա ինչպես անել): AM ճառագայթի վրա տեղադրենք P_2Q_2 հատվածին հավասար AC հատվածը, իսկ հետո տանենք BC հատվածը: Ստացված ABC եռանկյունը որոնելին է:

Իսկապես, ըստ կառուցման՝ $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$:

Նկարագրված կառուցման ընթացքը ցույց է տալիս, որ տրված կամայական P_1Q_1, P_2Q_2 հատվածների և hk չփռված անկյան դեպքում կարելի է որոնելի եռանկյունը կառուցել: Քանի որ նկարագրված a ուղիղը և նրա վրա A կետը կարող են ընտրվել կամայական ձևով, ուրեմն գոյություն ունեն խնդրի պայմաններին բավարարող անվերջ շատ եռանկյուններ: Սակայն այդ բոլոր եռանկյունները հավասար են (ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի): Դա նկատի ունենալով՝ ընդունված է ասել, որ *տվյալ խնդիրն ունի միակ լուծում*:



Եռանկյան կառուցումը երկու կողմերով և նրանցով կազմված անկյունով

Նկ. 99

Խնդիր 2: *Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ կողմի և նրան առընթեր երկու անկյան:*

Այս խնդիրը լուծեք ինքնուրույն:

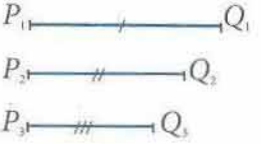
Խնդիր 3: *Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երեք կողմերի:*

Լուծում: Դիցուք՝ տրված են P_1Q_1, P_2Q_2 և P_3Q_3 հատվածները *(նկ. 100(ա))*: Պահանջվում է կառուցել ABC եռանկյուն, որում $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$:

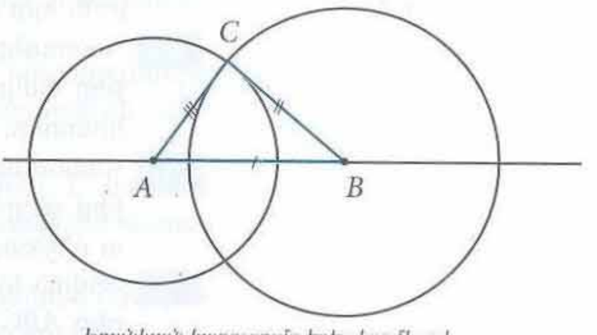
Տանենք ուղիղ և նրա վրա կարկինի օգնությամբ տեղադրենք P_1Q_1 հատվածին հավասար AB հատվածը *(նկ. 100(բ))*: Հետո կառուցենք երկու շրջանագիծ. մեկը՝ A կենտրոնով և P_3Q_3 շառավիղով, իսկ մյուսը՝ B կենտրոնով և P_2Q_2 շառավիղով: Դիցուք՝ շրջանագծերը հատվում են, և C-ն նրանց հատման կետերից մեկն է: Տանենք AC և BC հատվածները, ստանում ենք ABC եռանկյունը, որը որոնելին է:

Իսկապես, ըստ կառուցման՝ $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, այսինքն՝ ABC եռանկյան կողմերը հավասար են տրված հատվածներին:

Նկատենք, որ միշտ չէ, որ խնդիր 3-ը լուծում ունի: Բանն այն է, որ եթե տրված հատվածներից որևէ մեկը փոքր չէ մյուս երկուսի գումարից, ապա կառուցման քայլեր կատարելիս վերևում նկարագրված շրջանագծերը չեն հատվում, ուրեմն այդ դեպքում հնարավոր չէ կառուցել այդպիսի եռանկյուն:



ա)



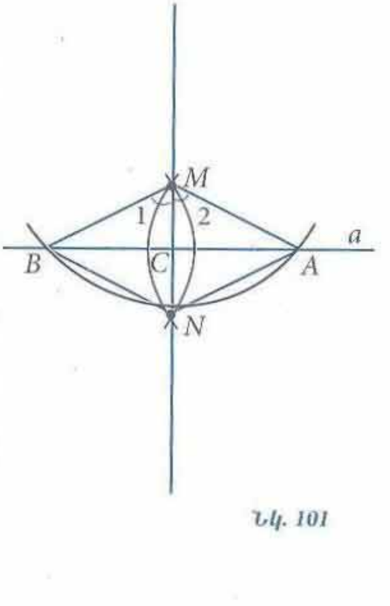
Եռանկյան կառուցումը երեք կողմերով

բ) Նկ. 100

Հարցեր և խնդիրներ

173. Տրված են a ուղիղը և նրա վրա չգտնվող M կետը: Կառուցեք M կետով անցնող և a ուղղին ուղղահայաց ուղիղը:

Լուծում: Կառուցենք M կենտրոնով այնպիսի շրջանագիծ, որը a ուղիղը հատում է երկու կետում. այդ կետերը նշանակենք A և B *(նկ. 101)*: Այնուհետև կառուցենք M կետով անցնող և A, B կենտրոններով երկու շրջանագիծ: Այդ շրջանագծերը հատվում են M կետում և ևս մեկ՝ N կետում: Տանենք MN ուղիղը և ապացուցենք, որ այն որոնելին է:



Նկ. 101

Իսկապես, AMN և BMN եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմի: Ուրեմն՝ $\angle 1 = \angle 2$: Դրանից բխում է, որ MC հատվածը AMB հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է (C–ն a և MN ուղիղների հատման կետն է):

Հետևաբար՝ MC–ն ABM եռանկյան նաև բարձրությունն է: Այսպիսով՝ $MN \perp AB$:

174. Տրված է AOB բութ անկյունը: Կառուցեք OX ճառագայթն այնպես, որ XOA և XOB անկյունները լինեն հավասար բութ անկյուններ:

175. Տրված է ABC եռանկյունը: Կառուցեք այդ եռանկյան՝ ա) AK կիսորդը, բ) BM միջնագիծը, գ) CH բարձրությունը:

176. Քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցեք անկյուն, որը հավասար լինի՝ ա) 45°, բ) 22°30′:

177. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի, նրան առընթեր անկյան և այդ անկյան գագաթից տարված կիսորդի:

178. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի, մյուս կողմերից մեկին տարված միջնագծի և տրված կողմի ու միջնագծի կազմած անկյան:

179. Տրված են PQ հատվածը և hk անկյունը: Կառուցեք ABC եռանկյունն այնպես, որ՝ ա) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle hk$, բ) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle hk$:

180. Տրված են երկու՝ hk և h_1k_1 անկյունները և PC հատվածը: Կառուցեք ABC եռանկյունն այնպես որ $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$

181. Կառուցեք հավասարասրուն եռանկյուն՝ ա) ըստ սրունքի և հիմքի հանդիպակաց անկյան, բ) ըստ հիմքի և նրան առընթեր անկյան, գ) ըստ հիմքի և սրունքի, դ) ըստ հիմքի և նրան տարված միջնագծի:

182. Տրված են P_1Q_1, P_2Q_2 և P_3Q_3 հատվածները: Կառուցեք ABC եռանկյունն այնպես, ո

ա) $AB=P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$,

բ) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2} P_3Q_3$: Արդյոք միշտ լուծում ունի խնդիրը:

II ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Բացատրեք, թե որ պատկերն է կոչվում եռանկյուն: Գծագրեք եռանկյուն և ցույց տվեք նրա կողմերը, գագաթները և անկյունները: Ի՞նչ է եռանկյան պարագիծը:
2. Ո՞ր եռանկյուններն են կոչվում հավասար:
3. Ի՞նչ է թեորեմը, և ի՞նչ է թեորեմի ապացուցումը:
4. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշն արտահայտող թեորեմը:
5. Բացատրեք, թե որ հատվածն է կոչվում տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայաց:
6. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայացի մասին:
7. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան միջնագիծ: Եռանկյունը քանի՞ միջնագիծ ունի:
8. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան կիսորդ: Եռանկյունը քանի՞ կիսորդ ունի:
9. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան բարձրություն: Եռանկյունը քանի՞ բարձրություն ունի:
10. Ո՞ր եռանկյունն է կոչվում հավասարասրուն: Ինչպե՞ս են կոչվում նրա կողմերը:
11. Ո՞ր եռանկյունն է կոչվում հավասարակողմ:
12. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են:
13. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ հավասարասրուն եռանկյան կիսորդի մասին:
14. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշն արտահայտող թեորեմը:

15. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշն արտահայտող թեորեմը:

16. Սահմանեք շրջանագիծը: Ի՞նչ է շրջանագծի կենտրոնը, շառավիղը, լարը, տրամագիծը:

17. Նկարագրեք, թե երկրաչափական կառուցումներում ինչ գործողություններ են կատարվում քանոնով և կարկինով:

18. Բացատրեք, թե տրված ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից ինչպես են տեղադրում տրվածին հավասար հատված:

19. Բացատրեք, թե ինչպես են տրված ճառագայթից տեղադրում տրվածին հավասար անկյուն:

20. Նկարագրեք, թե ինչպես են կառուցում տրված ուղղի վրա տրված կետով անցնող և այդ ուղղին ուղղահայաց ուղիղը:

21. Բացատրեք, թե ինչպես են կառուցում տրված հատվածի միջնակետը:

22. Բացատրեք, թե ինչպես են կառուցում տրված հատվածի միջնուղղահայացը:

23. Նկարագրեք, թե ինչպես են կառուցում տրված անկյան կիսորդը:

24. Բացատրեք, թե ինչպես են կառուցում եռանկյունը՝ ա) ըստ երկու կողմի և նրանցով կազմված անկյան, բ) ըստ կողմի և նրան առընթեր երկու անկյան:

25. Բացատրեք, թե ինչպես կառուցել եռանկյունը՝ ըստ երեք կողմի: Արդյոք մի՞շտ խնդիրը լուծում ունի:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

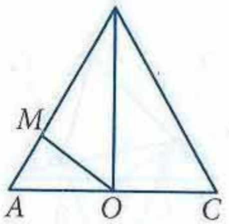
183. ABC եռանկյան պարագիծը 15 սմ է: BC կողմը AB կողմից մեծ է 2 սմ-ով, իսկ AB կողմը AC կողմից փոքր է 1 սմ-ով: Գտեք եռանկյան կողմերը:

184. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 2 սմ–ով մեծ է սրունքից և 3 սմ–ով փոքր է սրունքների գումարից: Գտեք եռանկյան կողմերը:

185. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 8 սմ է: Սրունքին տարված միջնագիծը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների այնպես, որ այդ եռանկյուններից մեկի պարագիծը մյուսի պարագծից մեծ է 2 սմ–ով: Գտեք տրված եռանկյան սրունքը:

186. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է BO միջնագիծը, իսկ BOC եռանկյան մեջ՝ OK կիսորդը: Գտեք AOK անկյունը:

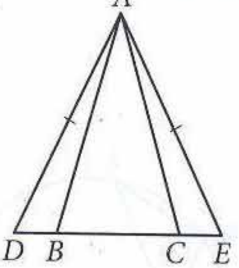
187. Նկար 102–ում $AB = BC$, OM–ը AOB եռանկյան կիսորդն է, $\angle MOC = 135°$: Ապացուցեք, որ $\angle ABO = \angle OBC$:



Նկ. 102

188. Ապացուցեք, որ եթե երկու հավասարասրուն եռանկյուններից մեկի սրունքը և հիմքի հանդիպակաց անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի սրունքին և հիմքի հանդիպակաց անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

189. a ուղիղն անցնում է AB հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է նրան: Ապացուցեք, որ՝ ա) a ուղղի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է A և B կետերից, բ) A և B կետերից հավասարահեռ յուրաքանչյուր կետ գտնվում է a ուղղի վրա:

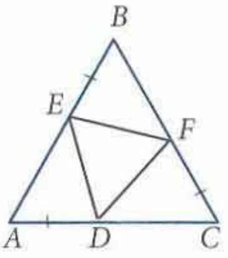


Նկ. 103

190. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների AM և A_1M_1 միջնագծերը հավասար են, $BC=B_1C_1$ և $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

191. Նկար 103–ում ADE եռանկյունը հավասարասրուն է, DE–ն՝ նրա հիմքը: Ապացուցեք, որ՝ ա) եթե $BD = CE$, ապա $\angle CAD = \angle BAE$ և $AB = AC$, բ) եթե $\angle CAD = \angle BAE$, ապա $BD = CE$ և $AB = AC$:

192. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան կողմերի միջնակետերը մեկ այլ հավասարասրուն եռանկյան գագաթներ են:

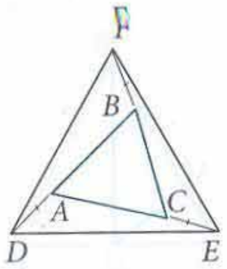


Նկ. 104

193. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա առանձնացված են հավասար՝ AD, BE և CF հատվածները, ինչպես ցույց է տրված նկար 104–ում: D, E, F կետերը հատվածներով միացված են: Ապացուցեք, որ DEF եռանկյունը հավասարակողմ է:

194. AB և CD հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր O միջնակետում: AC և BD հատվածների վրա K և K_1 կետերը նշված են այնպես, որ $AK = BK_1$: Ապացուցեք, որ՝ ա) $OK = OK_1$, բ) O կետը գտնվում է KK_1 ուղղի վրա:

195. AB և CD հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր O միջնակետում: M և N կետերը AC և BD հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ O կետը MN հատվածի միջնակետն է:



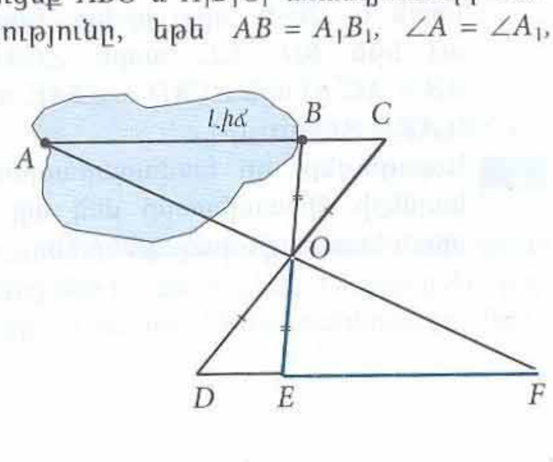
Նկ. 105

196. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմերը շարունակված են AD, CE, BF հավասար հատվածներով, ինչպես ցույց է տրված նկար 105–ում: Ապացուցեք, որ DEF եռանկյունը հավասարակողմ է:

197. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$: AC կողմի վրա D և E կետերը նշված են այնպես, որ D կետը գտնվում է AE հատվածի վրա, $BD = DA$, $BE = EC$: Գտեք $\angle DBE$–ն:

198. Նկար 106–ում $OC = OD$, $OB = OE$: Ապացուցեք, որ $AB = EF$: Այս խնդրի լուծման հիման վրա պարզաբանեք, թե ինչ եղանակով կարելի է չափել լճի լայնությունը (նկար 106–ում այն AB հատվածն է):

199. Ապացուցեք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների հավասարությունը, եթե $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$,

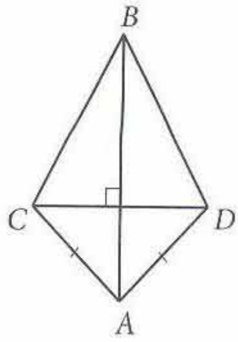


Նկ. 106

$AD = A_1D_1$, որտեղ AD–ն և A_1D_1–ը այդ եռանկյունների կիսորդներն են:

200. ABC և ADC եռանկյունների մեջ BC և AD կողմերը հավասար են և հատվում են O կետում, $\angle OAC = \angle OCA$: Ապացուցեք, որ ABO և CDO եռանկյունները հավասար են:

201. Նկար 107–ում $AC = AD$, $AB \perp CD$: Ապացուցեք, որ $BC = BD$ և $\angle ACB = \angle ADB$:

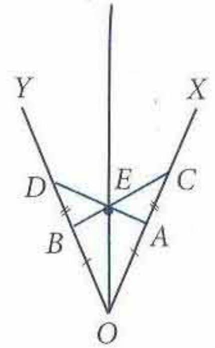


Նկ. 107

202*. Ապացուցեք, որ եռանկյան անկյանը կից անկյունը ավելի մեծ է, քան եռանկյան մյուս անկյուններից յուրաքանչյուրը:

203*. Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, եթե $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$:

204. XOY անկյան կողմերի վրա A, B, C և D կետերը նշված են այնպես, որ $OA = OB$, $AC = BD$ (նկ. 108): AD և BC ուղիղները հատվում են E կետում: Ապացուցեք, որ OE ճառագայթը XOY անկյան կիսորդն է:



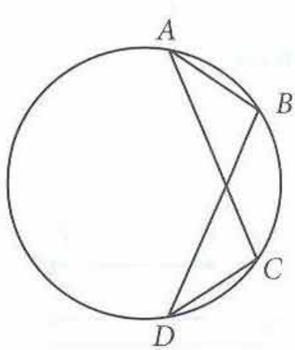
Նկ. 108

205*. Ապացուցեք, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են, եթե $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, որտեղ AM–ը և A_1M_1–ը եռանկյունների միջնագծերն են:

206*. Տրված են մի ուղղի վրա գտնվող երեք կետ՝ A–ն, B–ն, C–ն, իսկ D կետը չի գտնվում այդ ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ երեք՝ AD, BD և CD հատվածներից առնվազն երկուսը միմյանց հավասար չեն:

207*. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և AC սրունքների վրա P և Q կետերը նշված են այնպես, որ $\angle PXB = \angle QXC$, որտեղ X–ը BC հիմքի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $BQ = CP$:

208*. Տրված են երկու եռանկյուն՝ ABC և $A_1B_1C_1$: Հայտնի է, որ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$: ABC եռանկյան AC և BC կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար, K և L կետերը, իսկ $A_1B_1C_1$ եռանկյան A_1C_1 և B_1C_1 կողմերի վրա՝ K_1 և L_1 կետերն այնպես, որ $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$: Ապացուցեք, որ՝ ա) $KL = K_1L_1$, բ) $AL = A_1L_1$:



Նկ. 109

209. Նկար 109–ում $AB = CD$: Ապացուցեք, որ $AC = BD$:

210. Ապացուցեք, որ լարի միջնակետով անցնող տրամագիծը ուղղահայաց է այդ լարին:

211. Կառուցեք տրված կետով անցնող և տրված շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է տրված ուղղի վրա:

212. Կառուցեք տրված շառավիղով շրջանագիծ, որն անցնի տրված երկու կետերով:

213. Տրված են a ուղիղը, A, B կետերը և PQ հատվածը: Կառուցեք ABC եռանկյունն այնպես, որ նրա C գագաթը գտնվի a ուղղի վրա, և $AC = PQ$: Արդյոք միշտ խնդիրն ունի լուծում:

214. Տրված են շրջանագիծը, A, B կետերը և PQ հատվածը: Կառուցեք ABC եռանկյունն այնպես, որ նրա C գագաթը գտնվի տրված շրջանագծի վրա, և $AC = PQ$: Արդյոք միշտ խնդիրն ունի լուծում:

215. ABC եռանկյան BC կողմի վրա կառուցեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի A և C գագաթներից:

216. Տրված հատվածը կարկինի և քանոնի օգնությամբ բաժանեք չորս հավասար հատվածների:

ԳԼՈՒԽ III
Զուգահեռ ուղիղներ

§1 ԵՐԿՈՒ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

25. Զուգահեռ ուղիղների սահմանումը

Կետ 1-ում մենք եզրակացրել ենք, որ երկու ուղիղները կամ ունեն մեկ ընդհանուր կետ, այսինքն՝ հատվում են, կամ ընդհանուր կետ չունեն, այսինքն՝ չեն հատվում:

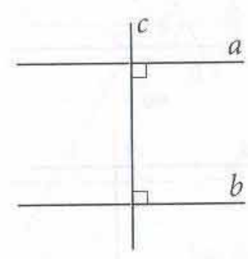
Սահմանում

Հարթության վրա գտնվող երկու ուղիղներ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք չեն հատվում:

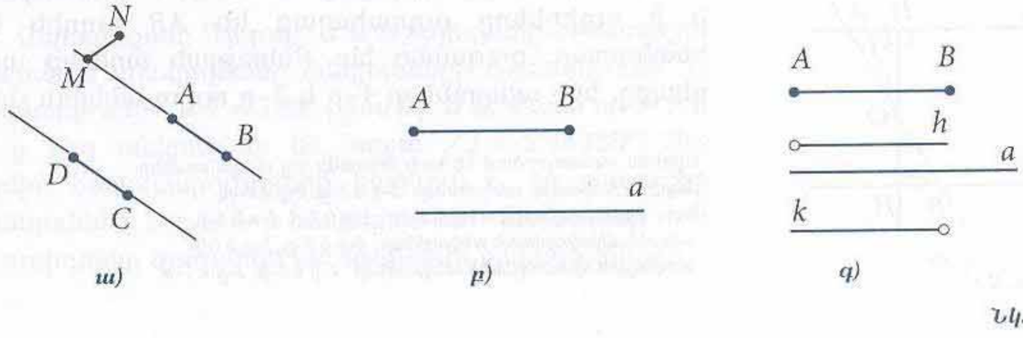
a և b ուղիղների զուգահեռությունը նշանակվում է այսպես՝ $a \parallel b$:

Նկար 110-ում պատկերված են c ուղղին ուղղահայաց a և b ուղիղները: Մենք արդեն բացահայտել ենք, որ այդպիսի a և b ուղիղները չեն հատվում, այսինքն՝ դրանք զուգահեռ են:

Զուգահեռ ուղիղների հետ մեկտեղ հաճախ դիտարկվում են նաև *զուգահեռ հատվածները*: Երկու հատվածներ կոչվում են *զուգահեռ*, եթե դրանք ընկած են զուգահեռ ուղիղների վրա: 111(ա) նկարում AB և CD



Նկ. 110

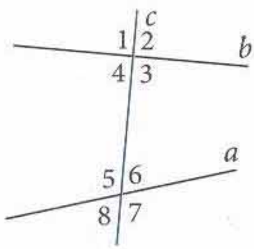


ա) բ) գ)

Նկ. 111

հատվածները զուգահեռ են ($AB \parallel CD$), իսկ MN և CD հատվածները զուգահեռ չեն: Նույն կերպ սահմանվում են ուղղի և հատվածի *(նկ. 111(բ))*, ճառագայթի և ուղղի, ճառագայթի և հատվածի, երկու ճառագայթների *(նկ. 111(գ))* զուգահեռությունը:

26. Երկու ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները

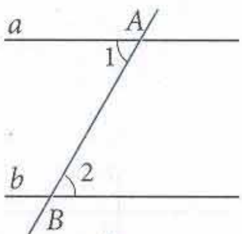


Նկ. 112

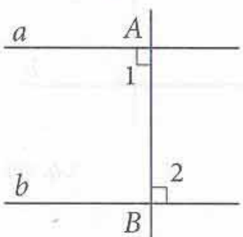
c ուղիղը a և b ուղիղների նկատմամբ կոչվում է *հատող*, եթե այն այդ ուղիղները հատում է երկու կետում *(նկ. 112)*: a և b ուղիղները c հատողով հատելիս առաջանում են ութ անկյուններ, որոնք նկար 112–ում նշանակված են թվանշաններով: Այդ անկյունների որոշ զույգերն ունեն հատուկ անվանումներ[1].

խաչադիր անկյուններ՝ 3–ը և 5–ը, 4–ը և 6–ը,
միակողմանի անկյուններ՝ 4–ը և 5–ը, 3–ը և 6–ը,
համապատասխան անկյուններ՝ 1–ը և 5–ը, 4–ը և 8–ը, 2–ը և 6–ը, 3–ը և 7–ը:

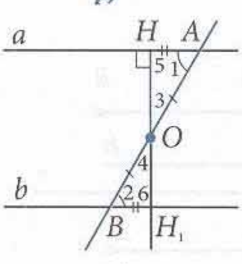
Դիտարկենք երկու ուղիղների զուգահեռության երեք հայտանիշ՝ կապված անկյունների այդ զույգերի հետ:



ա)



բ)



գ)

Նկ. 113

Թեորեմ: ***Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են, ապա ուղիղները զուգահեռ են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b ուղիղները AB հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են. օրինակ՝ $\angle 1 = \angle 2$ *(նկ. 113(ա))*: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:

Եթե 1–ը և 2–ը ուղիղ անկյուն են *(նկ. 113(բ))*, ապա a և b ուղիղները ուղղահայաց են AB ուղղին և, հետևաբար, զուգահեռ են: Քննության առնենք այն դեպքը, երբ անկյուններ 1–ը և 2–ը ուղիղ անկյուն չեն:

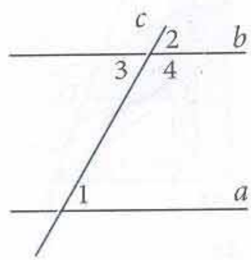
---

[1] Երբեմն օգտագործում են նաև մասամբ այլ անվանումներ.
ներքին խաչադիր անկյուններ՝ *3-ը և 5-ը, 4-ը և 6-ը,*
արտաքին խաչադիր անկյուններ՝ *1-ը և 7-ը, 2-ը և 8-ը,*
ներքին միակողմանի անկյուններ՝ *4-ը և 5-ը, 3-ը և 6-ը,*
արտաքին միակողմանի անկյուններ՝ *1-ը և 8-ը, 2-ը և 7-ը:*

AB հատվածի O միջնակետից տանենք a ուղղին ուղղահայաց՝ OH–ը *(նկ. 113(գ))*: b ուղղի վրա B կետից տեղադրենք AH հատվածին հավասար BH_1 հատվածը, ինչպես ցույց է տրված 113(գ) նկարում, և տանենք OH_1 հատվածը: OHA և OH_1B եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և նրանց կազմած անկյան ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$): Ուրեմն՝ $\angle 3 = \angle 4$ և $\angle 5 = \angle 6$: $\angle 3 = \angle 4$ հավասարությունից հետևում է, որ H_1 կետը ընկած է OH ճառագայթի շարունակության վրա, այսինքն՝ H, O և H_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: $\angle 5 = \angle 6$ հավասարությունից հետևում է, որ 6–ը ուղիղ անկյուն է (քանի որ անկյուն 5–ը ուղիղ է): Ուրեմն՝ a և b ուղիղները ուղղահայաց են HH_1 ուղղին, իսկ դրանից հետևում է, որ նրանք զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: ***Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս համապատասխան անկյունները հավասար են, ապա ուղիղները զուգահեռ են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b ուղիղները c հատողով հատելիս համապատասխան անկյունները հավասար են, օրինակ՝ $\angle 1 = \angle 2$ *(նկ. 114)*: Քանի որ անկյուններ 2–ը և 3–ը հակադիր են, ապա $\angle 2 = \angle 3$: Այս երկու հավասարությունից հետևում է, որ $\angle 1 = \angle 3$: Սակայն 1–ը և 3–ը խաչադիր անկյուններ են: Ուստի՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

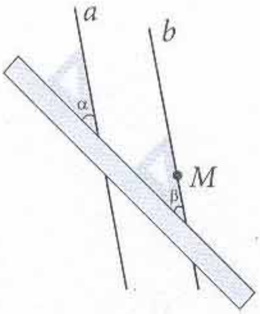


Նկ. 114

Թեորեմ: ***Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, ապա ուղիղները զուգահեռ են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b ուղիղները c հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, օրինակ՝ $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ *(տես նկ. 114)*: Քանի որ 3–ը և 4–ը կից անկյուններ են, ապա $\angle 3 + \angle 4 = 180°$: Այս երկու հավասարությունից հետևում է, որ խաչադիր անկյուններ 1–ը և 3–ը հավասար են: Հետևաբար՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

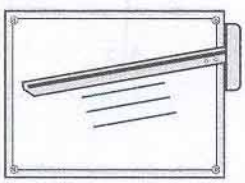
27. Զուգահեռ ուղիղների կառուցման գործնական եղանակներ



Նկ. 115

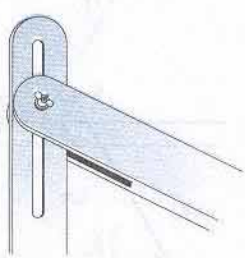
Աշխատանքի մեջ օգտագործվում են զանազան գործիքներ, որոնց օգնությամբ կառուցում են զուգահեռ ուղիղներ, և այդ կառուցման եղանակների հիմքում ընկած են ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները: Դիտարկենք, օրինակ, գծագրական անկյունաքանոնի և քանոնի օգնությամբ զուգահեռ ուղիղներ կառուցելու եղանակը:

Տրված *a* ուղղին զուգահեռ և *M* կետով անցնող ուղիղ կառուցելու համար *a* ուղղին հպենք անկյունաքանոնը, իսկ դրան՝ քանոնը, ինչպես ցույց է տրված նկար 115-ում: Այնուհետև անկյունաքանոնը քանոնի երկայնքով տեղաշարժելով՝ հասնենք նրան, որ M կետը հայտնվի անկյունաքանոնի կողմի վրա: Ապա գծենք *b* ուղիղը: Քանի որ նկար 115-ում α և β տառերով նշանակված համապատասխան անկյունները հավասար են, ուրեմն *a* և *b* ուղիղները զուգահեռ են:



Նկ. 116

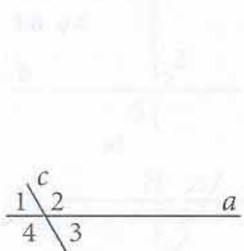
Նկար 116-ում ցույց է տրված զուգահեռ ուղիղների կառուցման եղանակը *ռեյշինա* կոչվող գծագրական քանոնի միջոցով: Այդ եղանակից օգտվում են գծագրական աշխատանքներում:



Նկ. 117

Համանման եղանակ է կիրառվում ատաղձագործական աշխատանքներում: Այնտեղ զուգահեռ ուղիղներ նշագծելու համար օգտագործվում է շինարարական անկյունացույց: Այն կազմված է փայտյա երկու շերտաձողից, որոնք ամրակցված են հոդակապով *(նկ. 117)*:

Հարցեր և խնդիրներ



Նկ. 118

217. Նկար 118-ում *a* և *b* ուղիղները հատած են *c* ուղղով: Ապացուցեք, որ $a \parallel b$, եթե. ա) $\angle 1 = 37^\circ$, $\angle 7 = 143^\circ$, բ) $\angle 1 = \angle 6$, գ) $\angle 1 = 45^\circ$, իսկ անկյուն 7-ը երեք անգամ մեծ է անկյուն 3-ից:

218. Ըստ նկար 119-ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ $AB \parallel DE$:

219. AB և CD հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր միջնակետում: Ապացուցեք, որ AC և BD ուղիղները զուգահեռ են:

220. Օգտվելով նկար 120-ի տվյալներից՝ ապացուցեք, որ $CB \parallel AD$:

221. Նկար 121-ում $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$: Ապացուցեք, որ $DE \parallel AC$:

222. Երկու զուգահեռ ուղիղներ երրորդով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների գումարը $210°$ է: Գտեք այդ անկյունները:

223. Երկու զուգահեռ ուղիղները երրորդով հատելիս առաջացած միակողմանի անկյուններից մեկը $32°$-ով մեծ է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները:

224. Նկար 122-ում $\triangle ABC = \triangle CDE$, $BC = DE$ (A, C, E կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա): Ապացուցեք, որ $AB \parallel CD$:

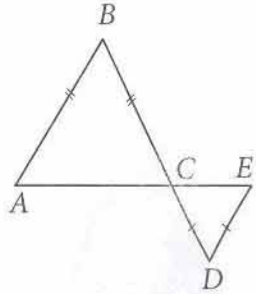
225. BK հատվածը ABC եռանկյան կիսորդ է: K կետով տարված է ուղիղ, որը BC կողմը հատում է M կետում այնպես, որ $BM = MK$: Ապացուցեք, որ $KM \parallel AB$:

226. ABC եռանկյան մեջ A անկյունը $40°$ է, իսկ ACB անկյանը կից BCE անկյունը՝ $80°$: Ապացուցեք, որ BCE անկյան կիսորդը զուգահեռ է AB ուղղին:

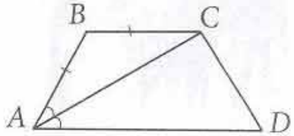
227. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$: B գագաթով տարված է BD ուղիղն այնպես, որ BC ճառագայթը ABD անկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ $AC \parallel BD$:

228. Գծագրեք ABD եռանկյուն: Օգտվելով գծագրական անկյունաքանոնից և քանոնից՝ այդ եռանկյան գագաթներից յուրաքանչյուրով տարեք հանդիպակաց կողմին զուգահեռ ուղիղ:

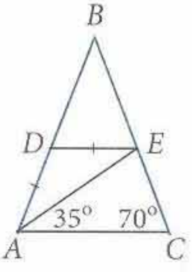
229. Գծագրեք ABC եռանկյուն և AC կողմի վրա նշեք D կետ: Օգտվելով գծագրական անկյունաքանոնից և քանոնից՝ D կետով տարեք եռանկյան մյուս երկու կողմերին զուգահեռ ուղիղներ:



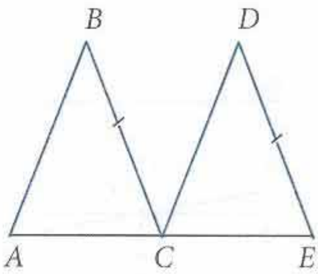
Նկ. 119



Նկ. 120



Նկ. 121



Նկ. 122

§2 ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԱՔՍԻՈՄԸ

28. Երկրաչափության աքսիոմների մասին

Երկրաչափական պատկերների հատկությունները ուսումնասիրելիս մենք ապացուցել ենք մի շարք թեորեմներ: Այդ ընթացքում, որպես կանոն, մենք հենվել ենք արդեն նախապես ապացուցված թեորեմների վրա: Հարց է ծագում, իսկ ինչի՞ հիման վրա են ապացուցվել երկրաչափության սկզբնական թեորեմները, ի վերջո, ո՞րն է այդ թեորեմների ելակետը: Այս հարցերն ունեն այսպիսի պատասխան. երկրաչափական պատկերների հատկությունների մասին որոշ պնդումներ համարվում են որպես սկզբնական դրույթներ: Դրանք ընդունվում են առանց ապացուցման, որոնց հիման վրա էլ այնուհետև ապացուցվում են թեորեմները: Այդ հիմքով էլ, ընդհանրապես, կառուցվում է ամբողջ երկրաչափությունը: Այդպիսի ելակետային դրույթներն անվանվում են *աքսիոմներ*:

Մի քանի աքսիոմներ մենք ձևակերպել ենք դեռևս առաջին գլխում, թեև դրանց աքսիոմ չենք անվանել: Աքսիոմի օրինակ է այն պնդումը, ըստ որի՝ ***ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*** Որոշ այլ աքսիոմներ, թեև հատուկ չեն առանձնացվել, փաստորեն, օգտագործվել են մեր դատողություններում: Այսպես, օրինակ, երկու հատվածների համեմատումը մենք կատարել ենք՝ օգտվելով մի հատվածը մյուսի վրա վերադրումից: Այդպիսի վերադրման հնարավորությունը բխում է հետևյալ աքսիոմից. ***յուրաքանչյուր ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար հատված, ընդ որում՝ միայն մեկը:*** Երկու անկյունների համեմատումը ևս հիմնված է նմանօրինակ աքսիոմի վրա. ***յուրաքանչյուր ճառագայթից նրա տրված կողմում կարելի է տեղադրել տրված չփռված անկյանը հավասար անկյուն, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Այս բոլոր աքսիոմները համարվում են ակնհայտ և կասկած չեն հարուցում: *«Աքսիոմ»* բառը ծագել է հունական *«աքսիոս»* բառից, որը բառացի նշանակում է *արժեքավոր, արժանի*: Երկրաչափության մեր դասընթացում ընդունված աքսիոմների լրիվ ցանկը դուք կուսումնասիրեք դասընթացի վերջում:

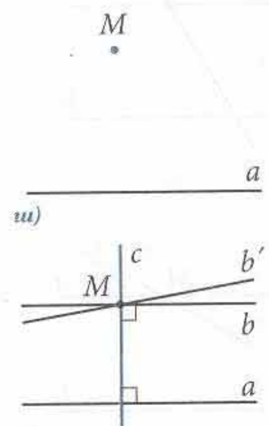
Այսպիսով՝ երկրաչափության կառուցման հարցում առկա է հետևյալ մոտեցումը. նախապես ձևակերպվում են ելակետային դրույթները՝ աքսիոմները: Այնուհետև՝ դրանց հիման վրա տրամաբանական մտահանգումների միջոցով ապացուցվում են հաջորդ պնդումները՝ թեորեմները: Այսպիսի մոտեցումը ծնունդ է առել վաղ անցյալում. դրանք շարադրվել են հույն մեծ մաթեմատիկոս ***Էվկլիդեսի*** (մ.թ.ա. 365–300թթ.) հռչակավոր *«Սկզբունքներ»* աշխատության մեջ: «Սկզբունքները» հայերենի է թարգմանվել 5–6–րդ դարերում. այդ մասին մեզ միայն տեղեկություններ են հասել: Պահպանվել են 11–րդ դարի առաջին կեսին կատարված թարգմանության առանձին հատվածներ, որոնք պատկանում են ***Գրիգոր Մագիստրոսի*** գրչին, իսկ հայտնաբերված ամբողջական թարգմանությունը վերագրվում է ***Գրիգոր Կեսարացուն*** (17–րդ դար): Էվկլիդեսի աքսիոմներից մի քանիսը (դրանց մի մասին նա անվանել է պոստուլատներ) այսօր էլ օգտագործվում են երկրաչափության դասընթացներում, իսկ «Սկզբունքներում» շարադրված երկրաչափությունը կոչվում է *էվկլիդեսյան երկրաչափություն*:

Էվկլիդես
(մ.թ.ա. 365–300թթ.)

Այժմ մենք կծանոթանանք երկրաչափության ամենահայտնի աքսիոմներից մեկին:

29. Զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը

Դիտարկենք կամայական a ուղիղ և նրա վրա չգտնվող M կետը *(նկ. 123(ա))*: Ապացուցենք, որ կարելի է M կետով տանել a ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Դրա համար M կետով տանենք երկու ուղիղ. նախ՝ a ուղղին ուղղահայաց c ուղիղը, ապա՝ c ուղղին ուղղահայաց b ուղիղը *(նկ.123(բ))*: Քանի որ a և b ուղիղներն ուղղահայաց են նույն c ուղղին, ապա իրենք զուգահեռ են:



Նկ. 123

Ն. Ի. Լոբաչևսկի
(1792–1856)

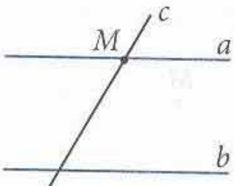
Այսպիսով՝ a ուղղի վրա չգտնվող M կետով անցնում է ուղիղ, որը զուգահեռ է a ուղղին: Սակայն հարց է ծագում. կարելի՞ է, արդյոք, M կետով տանել ևս մեկ այլ ուղիղ, որը զուգահեռ լինի a ուղղին: Մենք պատկերացնում ենք, որ եթե փորձենք b ուղիղը M կետի շուրջ «պտտել» նույնիսկ շատ փոքր անկյունով, ապա այն կհատի a ուղիղը *(b' ուղիղը 123(բ) նկարում)*: Այլ խոսքով՝ մեզ թվում է, որ հնարավոր չէ M կետով տանել b ուղղից տարբեր մեկ այլ այնպիսի ուղիղ, որը ևս զուգահեռ լինի a ուղղին: Իսկ հնարավո՞ր է արդյոք այդ պնդումն ապացուցել: Այս հարցն ունի ուշագրավ պատմություն: Էվկլիդեսի «Սկզբունքները» բովանդակում է մի պոստուլատ (Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը), ըստ որի՝ ուղղի վրա չգտնվող կետով կարելի է այդ ուղղին տանել միայն մեկ զուգահեռ ուղիղ: Շատ մաթեմատիկոսներ հին ժամանակներից ի վեր փորձել են ապացուցել այդ պոստուլատը, այսինքն՝ այն բխեցնել մյուս աքսիոմներից: Սակայն այդպիսի ամեն մի փորձ անհաջողության է մատնվել: Եվ միայն 19-րդ դարում է վերջնականապես պարզվել, որ տվյալ կետով տվյալ ուղղին զուգահեռ տարված ուղղի միակությունը հնարավոր չէ ապացուցել՝ հիմնվելով Էվկլիդեսի մյուս աքսիոմների վրա: Դա վկայում է, որ այդ պնդումն ինքը աքսիոմ է: Այդ խնդրի լուծման գործում, ի թիվս այլ մաթեմատիկոսների, վիթխարի ավանդ ունի ռուս նշանավոր մաթեմատիկոս ***Ն. Ի. Լոբաչևսկին*** (1792–1856):

Այսպիսով՝ որպես ևս մեկ ելակետային դրույթ՝ մենք ընդունում ենք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը.

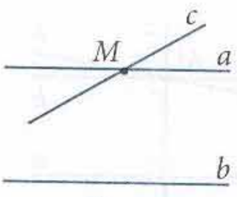
Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Որոշ պնդումներ աքսիոմներից կամ թեորեմներից բխում են անմիջականորեն: Ընդունված է դրանց անվանել հետևանքներ: Դիտարկենք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմի մի քանի հետևանք:

1°. ***Եթե ուղիղը հատում է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա այն հատում է նաև մյուսը:***



ա)



բ)

Նկ. 124

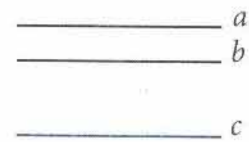
Իսկապես, դիցուք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են, և c ուղիղը M կետում հատում է a ուղիղը *(նկ. 124(ա))*:

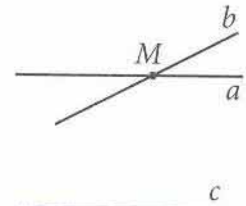
Ապացուցենք, որ c ուղիղը հատում է նաև b ուղիղը: Եթե c ուղիղը, որն անցնում է M կետով, չհատեր b ուղիղը, ապա կստացվեր, որ M կետով անցնում է b ուղիղին զուգահեռ երկու՝ a և c ուղիղներ *(նկ. 124(բ))*: Բայց դա կհակասեր զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Հետևաբար՝ c ուղիղը հատում է նաև b ուղիղը:

2^0. *Եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են երրորդ ուղիղին, ապա դրանք զուգահեռ են:*

Իսկապես, դիցուք՝ a և b ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է c ուղիղին *(նկ. 125(ա))*: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:

Ենթադրենք, որ a և b ուղիղները զուգահեռ չեն, այսինքն՝ հատվում են ինչ-որ M կետում *(նկ. 125(բ))*: Այդ դեպքում M կետով կանցներ c ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղ՝ a-ն և b-ն: Բայց դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը սխալ է, և, ուրեմն, a և b ուղիղները չեն հատվում, այսինքն՝ զուգահեռ են:





Նկ. 125

30. Թեորեմներ երկու զուգահեռ ուղիղներով և հատողով կազմված անկյունների մասին

Ամեն մի թեորեմի մեջ առանձնացվում են երկու մաս՝ *պայմանը և եզրակացությունը*: Թեորեմի պայմանն այն է, ինչը տրված է, իսկ եզրակացությունը՝ այն, ինչը պահանջվում է ապացուցել: Պայմանից եզրակացությունն ստացվում է տարբեր փաստերի ու փաստարկների կապակցված շղթայի միջոցով: Դրանց վերջին քայլում էլ հաստատվում է թեորեմի եզրակացությունը, այսինքն՝ ապացուցման ենթակա դրույթը:

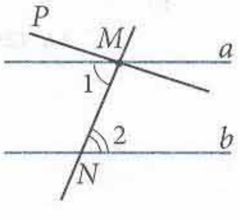
Քննության առնենք, օրինակ, երկու ուղիղների զուգահեռության հայտանիշն արտահայտող թեորեմը. «Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են»: Այս թեորեմի պայմանը դրա ձևակերպման առաջին մասն է՝ «երկու ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են» (սա տրվածն է): Եզրակացությունը երկրորդ մասն է՝ «այդ ուղիղները զուգահեռ են» (սա պահանջվում է ապացուցել):

Երբեմն ձևակերպվում են երկու այնպիսի թեորեմներ, որոնց պայմանները և պահանջները շրջված են: Այդպիսի թեորեմները կոչվում են *հակադարձ թեորեմներ:* Այսպիսով՝ տրված թեորեմի հակադարձ թեորեմ կոչվում է այն թեորեմը, որի պայմանը տրված թեորեմի եզրակացությունն է, իսկ եզրակացությունը՝ տրվածի պայմանը:

Հակադարձ թեորեմների մասին մեր գիտելիքները հետագայում ավելի կճշգրտենք: Իսկ այժմ ապացուցենք թեորեմներ, որոնք հակադարձ են 26–րդ կետում ապացուցված երեք թեորեմներին:

Թեորեմ: ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատած են հատողով, ապա խաչադիր անկյունները հավասար են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b զուգահեռ ուղիղների նկատմամբ MN–ը հատող է: Ապացուցենք, որ խաչադիր անկյունները, օրինակ՝ 1–ը և 2–ը, հավասար են *(նկ. 126):*



Նկ. 126

Ենթադրենք, թե անկյուններ 1–ը և 2–ը հավասար չեն: MN ճառագայթից տեղադրենք անկյուն 2–ին հավասար PMN անկյունն այնպես, որ $\angle PMN$–ը և $\angle 2$–ը լինեն խաչադիր՝ երբ MP և b ուղիղների համար MN–ը հատող է: Ըստ կառուցման՝ այդ խաչադիր անկյունները հավասար են, հետևաբար՝ $MP \parallel b$: Ստացվում է, որ M կետով անցնում են b ուղղին զուգահեռ երկու՝ a և MP ուղիղներ: Բայց դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Ուրեմն՝ մեր ենթադրությունը սխալ է: Հետևաբար՝ $\angle 1 = \angle 2$: Թեորեմն ապացուցված է:

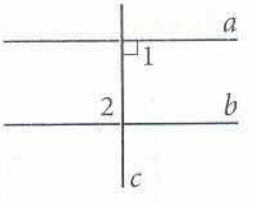
Պարզաբանում: Նկատենք, որ այս թեորեմի ապացուցման ընթացքում օգտվեցինք մեր պնդման ճշմարիտ լինելը հաստատելու մի եղանակից, որն անվանվում է *ապացուցում հակասող ենթադրությամբ:* Ապացուցման ընթացքում մենք ենթադրեցինք, թե a և b զուգահեռ ուղիղները MN հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները՝ 1–ը և 2–ը, հավասար չեն: Այսինքն՝ ենթադրեցինք հենց այն պնդման հակառակ պնդումը, ինչը պահանջվում էր ապացուցել: Ելնելով այդ ենթադրությունից՝ դատողությունների միջոցով մենք հանգեցինք մի այնպիսի արդյունքի, որը հակասում էր զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Դա վկայում է, որ մեր կատարած ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ խաչադիր անկյուններ 1–ի և 2–ի անհավասար լինելը բացառվում է: Իսկ դա հաստատում է, որ $\angle 1 = \angle 2$:

Կշռադատելու այս եղանակը մաթեմատիկայում հաճախ է կիրառվում: Մենք դրանից օգտվել էինք նաև ավելի վաղ: Օրինակ՝ 12–րդ կետում, երբ պարզաբանեցինք, որ երրորդ ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղները չեն հատվում, փաստորեն, օգտվեցինք ապացուցման նույն եղանակից: Նմանապես զուգահեռ ուղիղների աքսիոմից արված 1^0 և 2^0 հետևանքներն ապացուցեցինք՝ կատարելով հակասող ենթադրություն:

Հակասող ենթադրությամբ կատարվող ապացուցումները լայն կիրառություն ունեն նաև գիտության և կյանքի տարբեր հարցերի վերաբերյալ մեր մտքերը հաստատելիս: Բանն այն է, որ *երկու՝ իրար հակասող պնդումները միաժամանակ չեն կարող լինել ճշմարիտ. դրանցից մեկը կեղծ է*: Ուրեմն՝ եթե մենք հանգում ենք այնպիսի պնդման, որը հակասում է եղած ճշմարիտ դրույթներին կամ փաստերին, ապա մեր այդ պնդումը ճշմարիտ չէ: Հետևաբար՝ ճշմարիտ է դրա հակառակ պնդումը:

Այս պարզաբանումներից հետո՛ շարունակենք ուսումնասիրել զուգահեռ ուղիղների հատկությունները:

Հետևանք: ***Եթե ուղիղն ուղղահայաց է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա այն ուղղահայաց է նաև մյուսին:***



Նկ. 127

Իսկապես, դիցուք՝ $a \parallel b$ և $c \perp a$, այսինքն՝ $\angle 1 = 90^\circ$ *(տես նկ. 127)*: c ուղիղը հատում է a ուղիղը, ուրեմն այն հատում է նաև b ուղիղը: a և b զուգահեռ ուղիղները c հատողով հատվելիս խաչադիր անկյունները հավասար են: Մասնավորապես՝ $\angle 1 = \angle 2$: Քանի որ $\angle 1 = 90^\circ$, ապա և $\angle 2 = 90^\circ$, որը նշանակում է՝ $c \perp b$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Թեորեմ: ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով, ապա համապատասխան անկյունները հավասար են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b զուգահեռ ուղիղների նկատմամբ c–ն հատող է: Ապացուցենք, որ համապատասխան անկյունները, օրինակ՝ 1–ը և 2–ը, հավասար են *(տե՛ս նկ. 114)*: Քանի որ $a \parallel b$, ապա խաչադիր անկյուններ 1–ը և 3–ը հավասար են: Անկյուններ 2–ը և 3–ը՝ որպես հակադիր անկյուններ, ևս հավասար են: $\angle 1 = \angle 3$ և $\angle 2 = \angle 3$ հավասարություններից հետևում է, որ $\angle 1 = \angle 2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատած են հատողով, ապա միակողմանի անկյունների գումարը 180° է:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ a և b զուգահեռ ուղիղների նկատմամբ c–ն հատող է *(տե՛ս նկ. 114)*: Ապացուցենք, որ, օրինակ, $\angle 1 + \angle 4 = 180°$: Քանի որ $a \parallel b$, ապա 1 և 2 համապատասխան անկյունները հավասար են: Անկյուններ 2–ը և 4–ը կից են, ուստի՝ $\angle 2 + \angle 4 = 180°$: $\angle 1 = \angle 2$ և $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ հավասարություններից հետևում է, որ $\angle 1 + \angle 4 = 180°$: Թեորեմն ապացուցված է:

Պարզաբանում: Որևէ թեորեմի ապացուցված լինելուց դեռևս չի բխում, որ տեղի ունի նաև դրա հակադարձ թեորեմը: Ավելին՝ միշտ չէ, որ հակադարձ պնդումը ևս ճշմարիտ է լինում: Բերենք պարզագույն օրինակ: Մենք գիտենք, որ եթե անկյունները հակադիր են, ապա դրանք հավասար են: Մինչդեռ «եթե անկյունները հավասար են, ապա դրանք հակադիր են» պնդումը, անշուշտ, ճշմարիտ չէ: Դրա համար բավական է նշել թեկուզ մեկ օրինակ, երբ անկյունները հավասար են (ասենք՝ խաչադիր անկյունները՝ երկու զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս), մինչդեռ դրանք հակադիր չեն:

Նման դեպքում, երբ ցույց է տրվում որևէ պնդման կեղծ լինելը, ասում են, որ այդ պնդումը *հերքվում է*:

Հարցեր և խնդիրներ

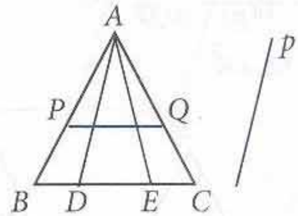
230. Տրված է ABC եռանկյունը: C գագաթով AB կողմին զուգահեռ քանի՞ ուղիղ կարելի է տանել:

231. p ուղղի վրա չգտնվող կետով տարված են չորս ուղիղ: Այդ ուղիղներից քանի՞սն են հատում p ուղիղը: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

232. a և b ուղիղները ուղղահայաց են p ուղղին, իսկ c ուղիղը հատում է a ուղիղը: c ուղիղը հատու՞մ է, արդյոք, p ուղիղը:

233. p ուղիղը զուգահեռ է ABC եռանկյան AB կողմին: Ապացուցեք, որ BC և AC ուղիղները հատում են p ուղիղը:

234. Նկար 128-ում $AD \parallel p$ և $PQ \parallel BC$: Ապացուցեք, որ p ուղիղը հատում է AB, AE, AC, BC և PQ ուղիղները:

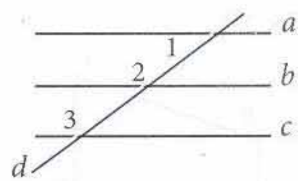


Նկ. 128

235. Երկու զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս խաչադիր անկյունների գումարը 240° է: Գտեք այդ անկյունների կից անկյունները:

236. Նկար 129-ում a, b և c ուղիղները հատած են d հատողով, $\angle 1 = 42^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 138^\circ$: a, b և c ուղիղներից որո՞նք են զուգահեռ:

237. Գտեք բոլոր անկյունները, որոնք առաջանում են երկու՝ a և b զուգահե՛ռ ուղիղները c հատողով հատելիս, եթե՝ ա) անկյուններից մեկը 150° է, բ) անկյուններից մեկը 70°-ով մեծ է մյուսից:

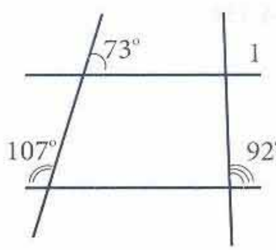


Նկ. 129

238. AB հատվածի ծայրակետերը գտնվում են a և b զուգահեռ ուղիղների վրա: Այդ հատվածի O միջնակետով անցնող ուղիղը հատում է a և b ուղիղները C և D կետերում: Ապացուցեք, որ $CO = OD$:

239. Ըստ նկար 130-ի տվյալների՝ գտեք $\angle 1$-ը:

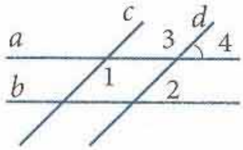
240. ABC անկյունը 70° է, իսկ BCD անկյունը՝ 110°: AB և CD ուղիղները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել՝ ա) զուգահեռ, բ) հատվող:



Նկ. 130

241. Պատասխանեք նախորդ խնդրի հարցերին, եթե $\angle ABC = 65^\circ$, իսկ $\angle BCD = 105^\circ$:

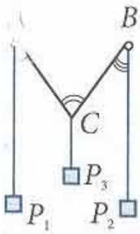
242. Երկու զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների տարբերությունը 50° է: Գտեք այդ անկյունները:



Նկ. 131

243. Նկար 131–ում $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45^\circ$: Գտեք անկյուններ 1–ը, 2–ը, 3–ը:

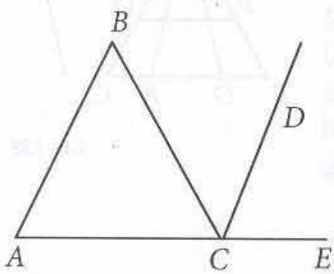
244. P_1 և P_2 մարմինները կախված են A և B ճախարակների վրայով գցված թելի ծայրերից *(նկ. 132)*: Երրորդ մարմինը՝ P_3–ը, կախված է նույն թելի C կետից և հավասարակշռում է P_1 և P_2 մարմիններին (այդ դեպքում $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$): Ապացուցեք, որ $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$:



Նկ. 132

245. Երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով: Ապացուցեք, որ՝ ա) խաչադիր անկյունների կիսորդները զուգահեռ են, բ) համապատասխան անկյունների կիսորդները զուգահեռ են, գ) միակողմանի անկյունների կիսորդները փոխուղղահայաց են:

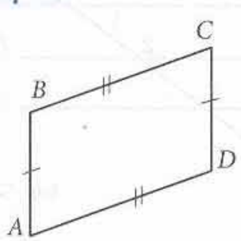
246. Նկար 133–ում $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$, CD–ն BCE անկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ $AB \parallel CD$:



Նկ. 133

247. Նկար 134–ում $AB = CD$ և $BC = AD$: Ապացուցեք, որ $BC \parallel AD$:

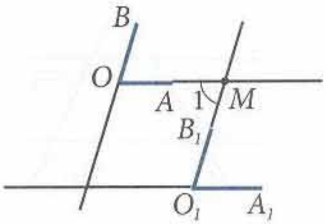
248. Նկար 133–ում $\angle BCA = \angle BCD = 60^\circ$, $AB=BC$: Ապացուցեք, որ $AB \parallel CD$:



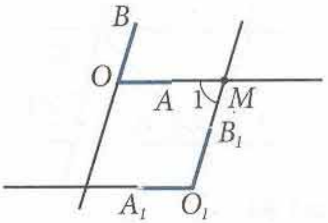
Նկ. 134

249. Ապացուցեք, որ եթե մի անկյան կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուս անկյան կողմերին, ապա այդ անկյունները կամ հավասար են, կամ էլ նրանց գումարը 180° է:

Լուծում: Դիցուք՝ AOB–ն և $A_1O_1B_1$–ը տրված անկյուններն են, և $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$: Եթե AOB անկյունը փռված է, ապա փռված է նաև $A_1O_1B_1$ անկյունը (բացատրեք՝ ինչու): Հետևաբար՝ այդ անկյունները հավասար են: Դիցուք՝ AOB–ն չփռված անկյուն է: AOB և $A_1O_1B_1$ անկյունների դասավորության դեպքերը պատկերված են 135(ա) և 135(բ) նկարներում: O_1B_1 ուղիղը հատում է O_1A_1 ուղիղը և, ուրեմն, հատում է նաև նրան զուգահեռ OA ուղիղը ինչ–որ M կետում: OB և O_1B_1 զուգահեռ ուղիղները հատված են OM հատողով: Ուստի՝ O_1B_1 և OA ուղիղների հատվելուց առաջացած անկյուններից մեկը *(անկյուն 1-ը՝ 135(ա) նկարում)* հավասար է AOB անկյանը (որպես խաչադիր անկյուններ): OA և O_1A_1 զուգահեռ ուղիղները հատված են O_1M հատողով, հետևաբար՝ կամ $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ *(նկ. 135(ա))*, կամ $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ *(նկ. 135(բ))*: $\angle 1 = \angle AOB$ և վերջին երկու հավասարություններից հետևում է, որ կամ $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ *(նկ. 135(ա))*, կամ էլ $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ *(նկ. 135(բ))*, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



ա)



բ)

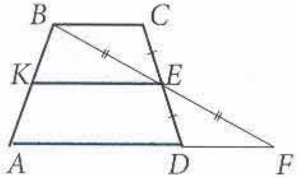
Նկ. 135

III ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Սահմանեք զուգահեռ ուղիղները: Ո՞ր երկու հատվածներն են կոչվում զուգահեռ:
2. Ի՞նչ է հատողը: Անվանեք այն անկյունների զույգերը, որոնք առաջանում են երկու զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս:
3. Ապացուցեք, որ եթե երկու ուղիղները հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:
4. Ապացուցեք, որ եթե երկու ուղիղները հատողով հատելիս համապատասխան անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:
5. Ապացուցեք, որ եթե երկու ուղիղները հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:
6. Նկարագրեք զուգահեռ ուղիղներ տանելու գործնական եղանակները:

7. Բացատրեք, թե որ պնդումներն են կոչվում աքսիոմներ: Բերեք աքսիոմների օրինակներ:
8. Ապացուցեք, որ տրված ուղղի վրա չգտնվող տրված կետով անցնում է տրված ուղղին զուգահեռ ուղիղ:
9. Ձևակերպեք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը:
10. Ո՞ր պնդումն է կոչվում հետևանք: Ապացուցեք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատող ուղիղը հատում է նաև մյուսը:
11. Ապացուցեք, որ եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են երրորդ ուղղին, ապա իրենք զուգահեռ են:
12. Ո՞ր թեորեմն է կոչվում տրված թեորեմին հակադարձ: Բերեք հակադարձ թեորեմների օրինակներ:
13. Ապացուցեք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են:
14. Ապացուցեք, որ եթե ուղիղը ուղղահայաց է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա ուղղահայաց է նաև մյուսին:
15. Ապացուցեք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներ հատողով հատելիս՝ ա)համապատասխան անկյունները հավասար են, բ)միակողմանի անկյունների գումարը 180° է:
16. Արդյոք ճշմարիտ է յուրաքանչյուր թեորեմի հակադարձ պնդումը: Պատասխանը լուսաբանեք օրինակով:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ



Նկ. 136

250. Նկար 136–ում $CE = ED$, $BE = EF$ և $KE \parallel AD$: Ապացուցեք, որ $KE \parallel BC$:

251. ABC եռանկյան AD կիսորդի միջնակետով անցնող և AD–ին ուղղահայաց ուղիղը հատում է AC կողմը M կետում: Ապացուցեք, որ $MD \parallel AB$:

252. Ըստ նկար 137–ի տվյալների՝ գտեք անկյուն 1–ը:

253. Նկար 138-ում DE-ն ADF անկյան կիսորդն է: Ըստ նկարի տվյալների՝ գտեք ADE եռանկյան անկյունները:

254. a և b ուղիղները զուգահեռ են c ուղղին: Ապացուցեք, որ a ուղիղը հատող յուրաքանչյուր ուղիղ հատում է նաև b ուղիղը:

255. a և b ուղիղները հատվում են: Կարելի՞ է, արդյոք, տանել այնպիսի ուղիղ, որը հատի a ուղիղը և զուգահեռ լինի b ուղղին: Պատասխանը հիմնավորեք:

256. Նկար 139-ում $AB = BD = BC$, $BE \parallel DC$: Ապացուցեք, որ $DC \perp AC$:

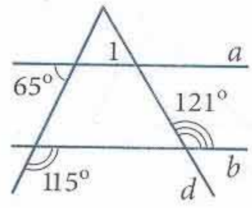
257. Նկար 140-ում $AB \parallel CD$, $AB = AC$, $\angle BCD = 40°$: Գտեք $\angle BAC$-ն:

258*. Տրված են երկու ուղիղ՝ a և b: Ապացուցեք, որ եթե a ուղիղը հատող ցանկացած ուղիղը հատում է նաև b ուղիղը, ապա a և b ուղիղները զուգահեռ են:

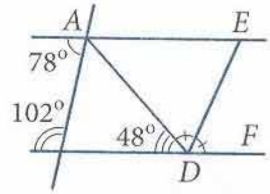
259. Ապացուցեք, որ եթե երկու՝ a և b ուղիղները հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար չեն, ապա a և b ուղիղները հատվում են:

260. Տրված են ABC եռանկյունը և այնպիսի M և N կետեր, որ BM հատվածի միջնակետը համընկնում է AC կողմի միջնակետին, իսկ CN հատվածի միջնակետը՝ AB կողմի միջնակետին: Ապացուցեք, որ M, N և A կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

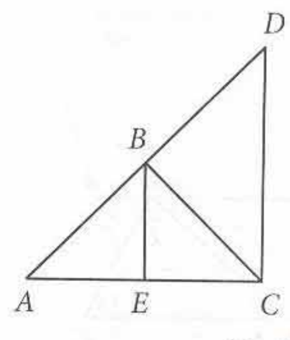
261. Տրված են a ուղիղը և նրա վրա չգտնվող A կետը: Կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցեք A կետով անցնող ուղիղ, որը զուգահեռ է a ուղղին:



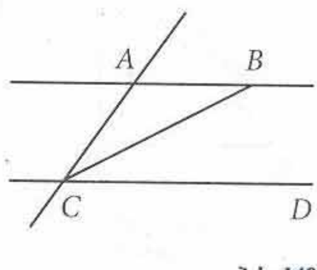
Նկ. 137



Նկ. 138



Նկ. 139



Նկ. 140

ԳԼՈՒԽ IV
Առնչություններ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև

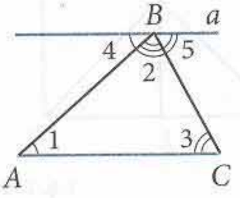
§ 1 ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԸ

31. Թեորեմ եռանկյան անկյունների գումարի մասին

Ապացուցենք երկրաչափության կարևորագույն թեորեմներից մեկը. այն վերաբերում է եռանկյան անկյունների գումարին:

Թեորեմ: ***Եռանկյան անկյունների գումարը 180° է:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ ABC–ն կամայական եռանկյուն է: Ապացուցենք, որ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$:



Նկ. 141

B գագաթով տանենք AC կողմին զուգահեռ a ուղիղը *(նկ. 141)*: Անկյուններ 1–ը և 4–ը խաչադիր են, որոնք առաջանում են a և AC զուգահեռ ուղիղները AB հատողով հատելիս: Խաչադիր են նաև անկյուններ 3–ը և 5–ը, որոնք առաջանում են նույն զուգահեռ ուղիղները BC հատողով հատելիս: Ուստի՝

$$\angle 4 = \angle 1 \text{ և } \angle 5 = \angle 3: \quad (1)$$

Ակնհայտ է, որ անկյուններ 4–ի, 2–ի և 5–ի գումարը հավասար է B գագաթով փռված անկյանը, այսինքն՝

$$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°:$$

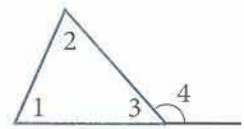
Այստեղից, հաշվի առնելով (1) հավասարությունները, ստացվում է՝ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, կամ՝ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$: Թեորեմն ապացուցված է:

Եռանկյան որևէ անկյանը կից անկյունը կոչվում է եռանկյան արտաքին անկյուն: Ապացուցենք, որ ***եռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է նրա այն***

երկու անկյունների գումարին, որոնք կից չեն այդ անկյանը:

Դիտենք նկար 142-ը, որում անկյուն 4-ը տվյալ եռանկյան անկյուն 3-ին կից՝ արտաքին անկյուն է: Քանի որ $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, իսկ ըստ եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմի՝ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, հետևաբար՝ $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացուցված պնդումից, մասնավորապես, հետևում է, որ ***եռանկյան արտաքին անկյունը մեծ է եռանկյան՝ այդ անկյանը ոչ կից յուրաքանչյուր անկյունից:***

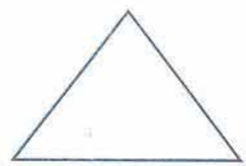


Նկ. 142

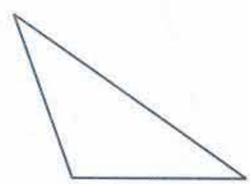
32. Սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն եռանկյուններ

Եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից հետևում է, որ եթե եռանկյան անկյուններից մեկը ուղիղ է կամ բութ, ապա մյուս երկու անկյունների գումարը 90°-ից ավելի չէ: Հետևապես մյուս երկու անկյուններից յուրաքանչյուրը սուր է: Այսպիսով՝ ***յուրաքանչյուր եռանկյան մեջ կա՛մ բոլոր անկյունները սուր են, կա՛մ անկյուններից երկուսը սուր են, իսկ երրորդը՝ ուղիղ կամ բութ:***

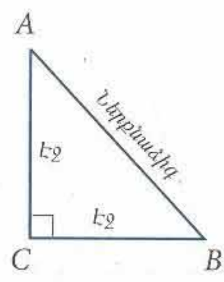
Եթե եռանկյան բոլոր՝ երեք անկյունները սուր են, եռանկյունը կոչվում է *սուրանկյուն եռանկյուն (նկ. 143(ա))*: Եթե եռանկյան անկյուններից մեկը բութ է, եռանկյունը կոչվում է *բութանկյուն եռանկյուն (նկ. 143(բ))*: Եթե եռանկյան անկյուններից մեկը ուղիղ է, եռանկյունը կոչվում է *ուղղանկյուն եռանկյուն (նկ. 143(գ))*: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան դիմացի կողմը կոչվում է *ներքնաձիգ*, իսկ երկու մյուս կողմերը՝ *էջեր*: 143(գ) նկարում պատկերված է C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյուն:



Սուրանկյուն եռանկյուն *ա)*



Բութանկյուն եռանկյուն *բ)*



Ուղղանկյուն եռանկյուն *գ)*

Նկ. 143

Խնդիրներ

262. Գտեք ABC եռանկյան C անկյունը, եթե՝ ա) $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 57^\circ$, բ) $\angle A = 24^\circ$, $\angle B = 130^\circ$, գ) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$, դ) $\angle A = 60^\circ + \alpha$, $\angle B = 60^\circ - \alpha$:

263. Գտեք ABC եռանկյան անկյունները, եթե $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$:

264. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան անկյուններից յուրաքանչյուրը 60° է:

265. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները սուր են:

266. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան անկյունները, եթե՝ ա)հիմքին առընթեր անկյունը կրկնակի մեծ է հիմքի հանդիպակաց անկյունից, բ)հիմքին առընթեր անկյունը երեք անգամ փոքր է իրեն կից արտաքին անկյունից:

267. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան անկյունները, եթե նրա անկյուններից մեկը հավասար է՝ ա)40°, բ)60°, գ)100°:

268. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է AD կիսորդը: Գտեք $\angle ADC$–ն, եթե $\angle C = 50^\circ$:

269. ABC եռանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են M կետում: Գտեք $\angle AMB$–ն, եթե $\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 96^\circ$:

270. ABC եռանկյան AM միջնագիծը հավասար է BC կողմի կեսին: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC$–ն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

271. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան արտաքին անկյուններից մեկը կրկնակի մեծ է նրա՝ այդ անկյանը ոչ կից որևէ անկյունից, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է: Արդյոք ճշմարի՞տ է հակադարձ պնդումը:

272. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի հանդիպակաց գագաթին հարակից արտաքին անկյան կիսորդը զուգահեռ է հիմքին:

273. Հավասարասրուն եռանկյան արտաքին անկյուններից մեկը 115° է: Գտեք եռանկյան անկյունները:

274. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է AD կիսորդը: Գտեք այդ եռանկյան անկյունները, եթե $\angle ADB = 110°$:

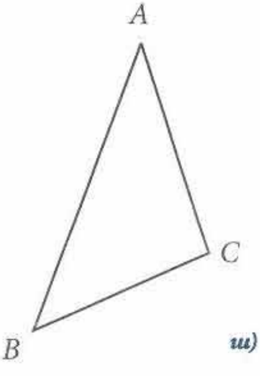
275. ABC եռանկյան C անկյունը $15°$ է: AC կողմի վրա նշված է D կետն այնպես, որ $\angle ABD = 12°$, $\angle ADB = 80°$: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC$-ն ուղղանկյուն եռանկյուն չէ:

276*. $45°$-ի հավասար A անկյան կողմերի վրա նշված են B և C կետերը, իսկ անկյան ներքին տիրույթում՝ D կետն այնպես, որ $\angle ABD = 90°$, $\angle ACD = 90°$: Գտեք BDC անկյունը:

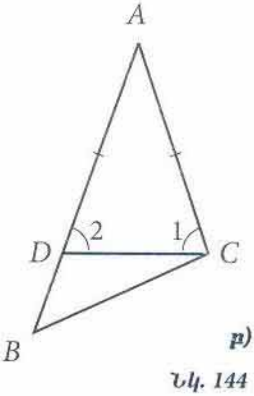
§2 ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

33. Թեորեմ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչությունների մասին

Թեորեմ: ***Եռանկյան մեջ՝ 1) ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն, 2) ընդհակառակը՝ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ կողմ:***



ա)



բ)

Նկ. 144

Ապացուցում: 1) Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ AB կողմը ավելի մեծ է AC կողմից *(նկ. 144(ա))*: Ապացուցենք, որ $\angle C > \angle B$:

AB կողմի վրա տեղադրենք AC կողմին հավասար AD հատվածը *(նկ. 144(բ))*: Քանի որ $AD < AB$, ապա D կետն ընկած է A և B կետերի միջև: Հետևաբար՝ անկյուն 1-ը C անկյան մի մասն է և, ուրեմն, $\angle C > \angle 1$: Անկյուն 2-ը BDC եռանկյան արտաքին անկյուն է, ուստի՝ $\angle 2 > \angle B$: Անկյուններ 1-ը և 2-ը ACD հավասարասրուն եռանկյան CD հիմքին առընթեր անկյուններ են, այսինքն՝ հավասար են: Այսպիսով՝ $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$: Այստեղից հետևում է, որ $\angle C > \angle B$:

2) Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $\angle C > \angle B$: Ապացուցենք, որ $AB > AC$:

Ենթադրենք, թե AB-ն AC-ից մեծ չէ, այսինքն՝ կամ $AB = AC$, կամ $AB < AC$: Առաջին դեպքում կստացվեր, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է և, ուրեմն, իբրև հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle B = \angle C$: Երկրորդ դեպքում կստացվեր, որ $\angle B > \angle C$ (ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն): Երկու դեպքում էլ հանգում ենք մեր ենթադրությանը հակասող եզրակացության: Ուրեմն մեր այդ ենթադրությունը ճշմարիտ չէ, և, հետևաբար, $AB > AC$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1: *Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը մեծ է էջից:*

Բանն այն է, որ ներքնաձիգի դիմաց ընկած է ուղիղ անկյուն, իսկ էջի դիմաց՝ սուր անկյուն: Քանի որ ուղիղ անկյունը սուր անկյունից մեծ է, ուրեմն ներքնաձիգն ավելի մեծ է, քան էջը:

Հետևանք 2: ***Եթե եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է*** *(հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշը):*

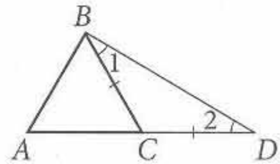
Ապացուցենք այս հայտանիշը: Դիցուք՝ եռանկյան երկու անկյունները հավասար են: Եթե ենթադրենք, թե այդ անկյունների հանդիպակաց կողմերից մեկը մեծ է մյուսից, ապա կհետևեր, որ այդ անկյուններից մեկն էլ մեծ է մյուս անկյունից: Այլ խոսքով՝ այդ ենթադրությունը կհանգեցներ հակասության: Այսպիսով՝ եռանկյան երկու կողմերը հավասար են, այսինքն՝ եռանկյունը հավասարասրուն է:

34. Եռանկյան անհավասարությունը

Թեորեմ: ***Եռանկյան յուրաքանչյուր կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից:***

Ապացուցում: Դիտարկենք կամայական ABC եռանկյուն և ապացուցենք, որ $AB < AC + CB$:

AC կողմի շարունակության վրա տեղադրենք CB կողմին հավասար CD հատվածը *(նկ. 145)*: BCD հավասարասրուն եռանկյան մեջ $\angle 1 = \angle 2$: Բայց ABD անկյունը մեծ է $\angle 1$-ից և, ուրեմն, $\angle ABD > \angle 2$: Քանի որ եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ կողմ, ապա $AB < AD$: Նկատենք, որ $AD = AC + CD = AC + CB$: Հետևաբար՝ $AB < AC + CB$: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 145

Հետևանք: ***Մի ուղղի վրա չգտնվող ցանկացած երեք՝ A, B, C կետերի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.*** $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$:

Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրը կոչվում է *եռանկյան անհավասարություն:*

Եռանկյան անհավասարության միջոցով կարող ենք ավելի հիմնավոր պատասխան տալ, մասնավորապես այն հարցին, թե արդյոք հնարավոր է տրված երեք հատվածներով կառուցել եռանկյուն *(տես խնդիր 3-ը կետ 24-ում)*: Հասկանալի է, որ այդպիսի կառուցումը հնարավոր կլինի, եթե տրված այդ հատվածները բավարարեն եռանկյան անհավասարությանը:

Հարցեր և խնդիրներ

277. Համեմատեք ABC եռանկյան անկյունները և պարզեք, թե A անկյունը կարող է, արդյոք, լինել բութ, եթե՝ ա) $AB > BC > AC$, բ) $AB = AC < BC$:

278. Համեմատեք ABC եռանկյան կողմերը, եթե՝ ա) $\angle A > \angle B > \angle C$, բ) $\angle A > \angle B = \angle C$:

279. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան սրունքը մեծ է այն հատվածից, որը հիմքի վրա գտնվող և գագաթներից տարբեր ցանկացած կետը միացնում է հանդիպակաց գագաթին:

280. Ապացուցեք, որ եռանկյան միջնագիծը փոքր չէ այդ նույն գագաթից տարված բարձրությունից:

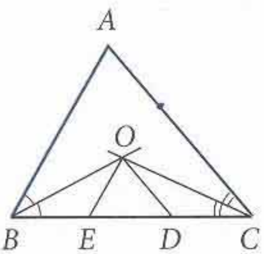
281. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան A և C անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ AOC եռանկյունը հավասարասրուն է:

282. ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին զուգահեռ ուղիղը M և N կետերում հատում է AB և AC սրունքները: Ապացուցեք, որ AMN եռանկյունը հավասարասրուն է:

283. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան արտաքին անկյան կիսորդը զուգահեռ է եռանկյան կողմին, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

284. ABC եռանկյան C գագաթով տարված է ուղիղ, որը զուգահեռ է AA_1 կիսորդին և AB ուղիղը հատում է D կետում: Ապացուցեք, որ $AC = AD$:

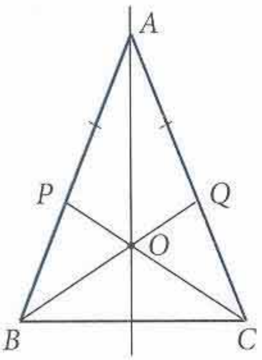
285. AD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: D կետով տարված է ուղիղ, որը զուգահեռ է AC–ին և AB կողմը հատում է E կետում: Ապացուցեք, որ ADE եռանկյունը հավասարասրուն է:



Նկ. 146

286. ABC եռանկյան BB_1 և CC_1 կիսորդների հատման կետով տարված է ուղիղ, որը զուգահեռ է BC ուղիղին և AB ու AC կողմերը հատում է, համապատասխանաբար, M և N կետերում: Ապացուցեք, որ $MN = BM + CN$:

287. Նկար 146–ում BO և CO ճառագայթները ABC եռանկյան B և C անկյունների կիսորդներն են, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$: Ապացուցեք, որ EDO եռանկյան պարագիծը հավասար է BC հատվածի երկարությանը:



Նկ. 147

288. Նկար 147–ում $AB = AC$, $AP = AQ$: Ապացուցեք, որ՝ ա) BOC եռանկյունը հավասարասրուն է, բ) OA ուղիղը ուղղահայաց է BC հիմքին և անցնում է նրա միջնակետով:

289. Կարո՞ղ է գոյություն ունենալ եռանկյուն հետևյալ կողմերով. ա) 1մ, 2 մ և 3 մ, բ) 1,2 դմ, 1 դմ և 2,4 դմ:

290. Հավասարասրուն եռանկյան կողմերից մեկը 25 սմ է, իսկ մյուսը՝ 10 սմ: Դրանցից ո՞րն է հիմքը:

291. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան կողմը, եթե նրա մյուս կողմերը հավասար են՝ ա) 5 սմ և 3 սմ, բ) 8 սմ և 2 սմ, գ)10 սմ և 5 սմ:

292. Ապացուցեք, որ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմը մեծ է նրա մյուս երկու կողմերի տարբերությունից:

Լուծում: Ապացուցենք, օրինակ, որ ABC եռանկյան մեջ $AB > AC - BC$: Քանի որ, ըստ եռանկյան անհավասարության, $AB + BC > AC$, ապա $AB > AC - BC$:

293. Եռանկյան տարբեր գագաթներին հարակից երկու արտաքին անկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

294. Եռանկյան՝ տարբեր գագաթներին հարակից երկու արտաքին անկյունները հավասար են: Եռանկյան պարագիծը 74 սմ է, իսկ կողմերից մեկը՝ 16 սմ: Գտեք եռանկյան մյուս կողմերը:

295. Հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը 25 սմ է, երկու կողմերի տարբերությունը՝ 4 սմ, իսկ նրա արտաքին անկյուններից մեկը սուր է: Գտեք եռանկյան կողմերը:

§3 ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

35. Ուղղանկյուն եռանկյունների որոշ հատկություններ

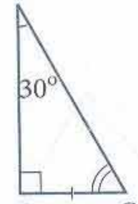
Ուսումնասիրենք ուղղանկյուն եռանկյունների մի քանի հատկություններ, որոնք հաստատվում են եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմի օգնությամբ:

1^0. ***Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է:***

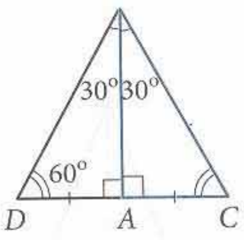
Բանն այն է, որ եռանկյան անկյունների գումարը 180° է, իսկ ուղիղ անկյունը՝ 90°: Ուրեմն՝ սուր անկյունների գումարը 90° է:

2^0. ***Ուղղանկյուն եռանկյան 30°-ի անկյան հանդիպակաց էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:***

Դիտարկենք ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որում $\angle A$-ն ուղիղ է, $\angle B = 30°$ և, ուրեմն, $\angle C = 60°$ (*նկ. 148(ա)*): Ապացուցենք, որ $AC = \frac{1}{2}BC$:



ա)



բ)

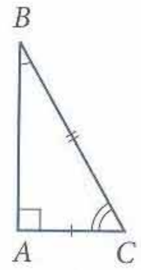
Նկ. 148

ABC եռանկյանը կցենք իրեն հավասար ABD եռանկյուն այնպես, ինչպես ցույց է տրված 148(բ) նկարում: Ստացվում է BCD եռանկյունը, որում $\angle B = \angle D = 60°$, ուստի՝ $DC = BC$: Բայց $AC = \frac{1}{2}DC$: Հետևաբար՝ $AC = \frac{1}{2}BC$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

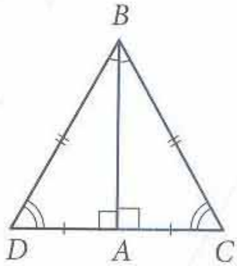
3^0. ***Եթե ուղղանկյուն եռանկյան էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին, ապա այդ էջի հանդիպակաց անկյունը 30° է:***

Դիտարկենք ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որի AC էջը հավասար է BC ներքնաձիգի կեսին *(նկ. 149(ա))*: Ապացուցենք, որ $\angle ABC = 30°$:

ABC եռանկյանը կցենք իրեն հավասար ABD եռանկյունը, ինչպես ցույց է տրված 149(բ) նկարում: Ստացվում է BCD հավասարակողմ եռանկյունը: Հավասարակողմ եռանկյան անկյունները միմյանց հավասար են (բացատրեք, թե ինչու), ուստի նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է 60°–ի: Բայց $\angle DBC = 2\angle ABC$, հետևաբար՝ $\angle ABC = 30°$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



ա)



բ)

Նկ. 149

36. Ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշները

Քանի որ ուղղանկյուն եռանկյան էջերով կազմված անկյունը ուղիղ է, իսկ ցանկացած երկու ուղիղ անկյուններ հավասար են, ապա եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշից հետևում է. ***եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջերը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջերին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***

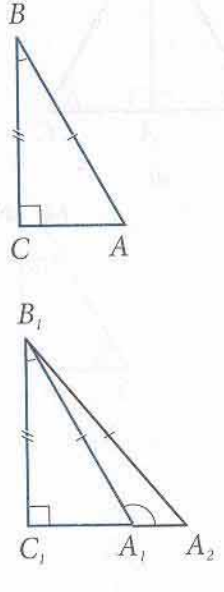
Հաջորդ հետևությունը բխում է եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշից: Այն է՝ ***եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջը և նրան առընթեր սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին ու նրան առընթեր սուր անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***

Դիտարկենք ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության ևս երկու հայտանիշ:

Թեորեմ: ***Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգն ու սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին և սուր անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***

Ապացուցում: 35–րդ կետի 1–ին հատկությունից հետևում է, որ այդ եռանկյունների երկրորդ սուր անկյունները ևս հավասար են: Ուստի, ըստ եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշի, այն է՝ ըստ կողմի (ներքնաձիգի) և նրան առընթեր երկու անկյան հայտանիշի, այդ եռանկյունները հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: ***Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջն ու ներքնաձիգը համապատասխանաբար հավասար են մյուս էջին ու ներքնաձիգին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***



Նկ. 150

Ապացուցում: Դիտարկենք երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ՝ ABC–ն և $A_1B_1C_1$–ը, որոնց C և C_1 անկյունները ուղիղ են, և $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ *(նկ. 150)*: Ապացուցենք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$:

Քանի որ $\angle C = \angle C_1$, ապա ABC եռանկյունը կարելի է $A_1B_1C_1$ եռանկյան վրա վերադրել այնպես, որ C և C_1 գագաթները համընկնեն, իսկ CA և CB կողմերը վերադրվեն համապատասխանաբար C_1A_1 և C_1B_1 ճառագայթների վրա: Որովհետև $CB = C_1B_1$, ուրեմն B գագաթը կհամընկնի B_1 գագաթին: Բայց այդ դեպքում A և A_1 գագաթները ևս կհամընկնեն: Այլապես, եթե ենթադրենք, որ A գագաթը համընկնում է C_1A_1 ճառագայթի մեկ այլ՝ A_2 կետի հետ, ապա կստացվեր $A_1B_1A_2$ հավասարասրուն եռանկյունը, որի A_1A_2 հիմքին առընթեր անկյունները հավասար չեն (*նկ. 150–ում* $\angle A_2$–ը սուր է, իսկ $\angle A_1$–ը՝ բութ՝ որպես $B_1A_1C_1$ սուր անկյանը կից անկյուն): Իսկ դա անհնար է, ուստի՝ A և A_1 գագաթները համընկնում են: Հետևաբար՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն ամբողջությամբ համընկնում են, այսինքն՝ հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիրներ

296. Գտեք հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները:

297. CE հիմքով CDE հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է CF բարձրությունը: Գտեք $\angle ECF$ –ը, եթե $\angle D = 54^\circ$:

298. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը 60° է, իսկ ներքնաձիգի և փոքր էջի գումարը՝ 26,4 սմ: Գտեք եռանկյան ներքնաձիգը:

299. C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան A գագաթին հարակից արտաքին անկյունը 120° է, և $AC + AB = 18$ սմ: Գտեք AC–ն և AB–ն:

300. ABC հավասարակողմ եռանկյան BC կողմի D միջնակետից տարված է AC ուղղին ուղղահայաց՝ DM–ը: Գտեք AM–ը, եթե $AB = 12$ սմ:

301. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի հանդիպակաց անկյունը 120° է: Սրունքին տարված բարձրությունը 9 սմ է: Գտեք եռանկյան հիմքը:

302. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը 7,6 սմ է, իսկ եռանկյան սրունքը՝ 15,2 սմ: Գտեք այդ եռանկյան անկյունները:

303. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի գագաթներից տարված բարձրությունները հավասար են:

304. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ A և A_1 անկյունները ուղիղ են, իսկ BD–ն և B_1D_1–ը կիսորդներ են: Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, եթե $\angle B = \angle B_1$ և $BD = B_1D_1$:

305. ABC հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան AB և AC սրունքներին տարված բարձրությունները հատվում են M կետում: Գտեք եռանկյան անկյունները, եթե $\angle BMC = 140^\circ$:

306. ABC եռանկյան AA_1 և BB_1 բարձրությունները հատվում են M կետում: Գտեք $\angle AMB$–ն, եթե $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 67^\circ$:

307. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված են AF կիսորդը և AH բարձրությունը: Գտեք AHF եռանկյան անկյունները, եթե $\angle B = 112^\circ$:

308. O անկյան կողմերի վրա A և B կետերը նշված են այնպես, որ $OA = OB$: Այդ կետերով տարված են անկյան կողմերին ուղղահայացներ, որոնք հատվում են C կետում: Ապացուցեք, որ OC ճառագայթը O անկյան կիսորդն է:

309. Ապացուցեք, որ եթե մի սուրանկյուն եռանկյան կողմը և նրա ծայրակետերից տարված բարձրությունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս սուրանկյուն եռանկյան կողմին ու նրա ծայրակետերից տարված բարձրություններին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

310. Ձևակերպեք և ապացուցեք ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշ՝ ըստ էջի և նրա հանդիպակաց անկյան:

311. Ապացուցեք, որ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, եթե $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ և $BH = B_1H_1$, որտեղ BH–ը և B_1H_1–ը ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների բարձրություններ են:

312. Քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցեք անկյուն, որը հավասար լինի՝ ա) 30°, բ) 15°, գ) 75°, դ) 120°, ե) 165°:

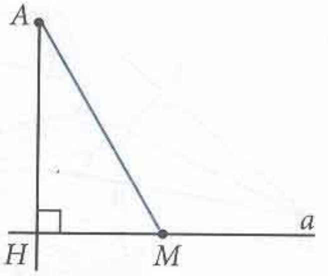
§4 ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

37. Կետի հեռավորությունը ուղղից

Երկու կետերի միջև հեռավորություն մենք անվանել ենք այդ կետերը միացնող հատվածի երկարությունը: Այժմ ներմուծենք կետի և ուղղի միջև հեռավորության հասկացությունը:

Դիցուք՝ AH հատվածը A կետից a ուղղին տարված ուղղահայացն է, իսկ M–ը՝ a ուղղի ցանկացած կետ, որ տարբեր է H–ից *(նկ. 151)*: AM հատվածը կոչվում է *A կետից a ուղղին պարված թեք*: $\triangle AHM$–ը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի AH էջը փոքր է AM ներքնաձիգից (բացատրեք, թե ինչու): Հետևաբար՝ ***կետից ուղղին տարված ուղղահայացը փոքր է նույն կետից այդ ուղղին տարված յուրաքանչյուր թեքից:***

Կետից ուղղին տարված ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է այդ կետի և ուղղի միջև հեռավորություն:

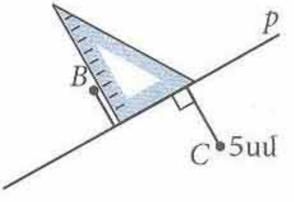


AM հատվածը a ուղղին պարված թեք է

Նկ. 151

Նշենք, որ կետի և ուղղի միջև հեռավորությունը հավասար է այդ կետից մինչև տվյալ ուղղի կետերը եղած հեռավորություններից փոքրագույնին:

Նկար 152–ում p ուղղի հեռավորությունը B կետից 3 սմ է, իսկ C կետից՝ 5 սմ: Կարող ենք նաև ասել, որ p ուղղից B կետի հեռավորությունը 3 սմ է, իսկ C կետի հեռավորությունը՝ 5 սմ:



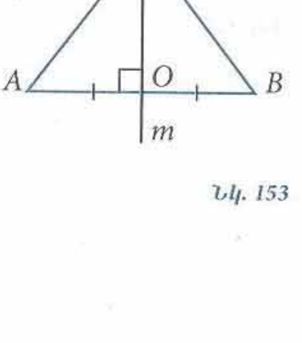
Նկ. 152

38. Հատվածի միջնուղղահայացի և անկյան կիսորդի հատկությունները

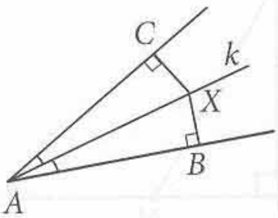
Հեռավորությունների հետ կապված կարևոր հատկություններով են օժտված հատվածի միջնուղղահայացը և անկյան կիսորդը: Այժմ դիտարկենք այդ հատկությունները:

Հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունը

Դիցուք՝ m ուղիղը AB հատվածի միջնուղղահայացն է. $OA = OB$, $m \perp AB$: m ուղղի վրա վերցնենք կամայական X կետ և այն հատվածներով միացնենք A և B կետերին *(նկ. 153)*: Եթե X կետը O միջնակետից տարբեր է, ապա AXB եռանկյունը հավասարասրուն է. $XA = XB$ (բացատրեք, թե ինչու): Իսկ եթե X կետը համընկնում է O միջնակետին, ապա դարձյալ $XA = XB$: Նշանակում է՝ X կետը հավասարապես է հեռացված A և B կետերից: Այսպիսով՝ ***հատվածի միջնուղղահայացի ցանկացած կետը հավասարահեռ է այդ հատվածի ծայրակետերից:***



Նկ. 153



Նկ. 154

Անկյան կիսորդի հատկությունը

Դիցուք՝ k–ն A անկյան կիսորդն է: k ճառագայթի վրա վերցնենք կամայական X կետ և այդ կետից տանենք A անկյան կողմերին ուղղահայացներ՝ XB–ն և XC–ն[1] *(նկ. 154)*: Դիտարկենք ABX և ACX ուղղանկյուն եռանկյունները: Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ եռանկյունները հավասար են և, ուրեմն, $XB = XC$: Իսկ սա նշանակում է, որ X կետից մինչև A անկյան կողմերը եղած հեռավորությունները հավասար են:

Այսպիսով՝ ***անկյան կիսորդի ցանկացած կետ հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից:***

39. Զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը

Նախքան զուգահեռ ուղիղների հեռավորության հասկացության ներմուծելը՝ քննության առնենք զուգահեռ ուղիղների մի կարևոր հատկություն:

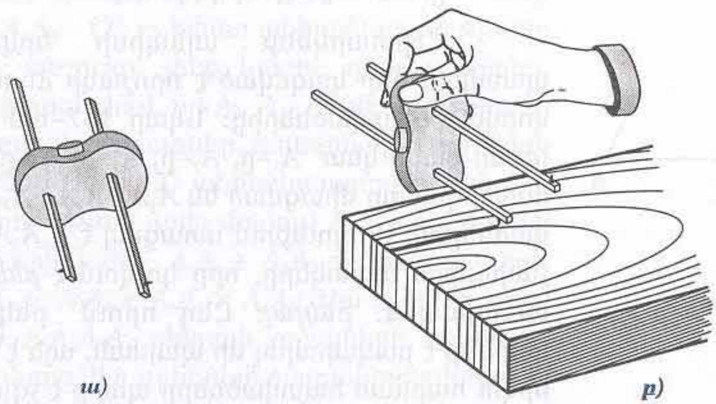
Թեորեմ: ***Երկու զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս ուղղից:***

Նկ. 155

Ապացուցում: Դիտարկենք a և b զուգահեռ ուղիղները: a ուղղի վրա նշենք որևէ A կետ և այդ կետից տանենք b ուղղին ուղղահայաց՝ AB–ն *(նկ. 155)*: Ապացուցենք, որ a ուղղի ցանկացած X կետի հեռավորությունը b ուղղից հավասար է AB–ին:

X կետից տանենք b ուղղին ուղղահայաց՝ XY–ը: Քանի որ $XY \perp b$ և $a \parallel b$, ապա $XY \perp a$: ABY և YXA ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան (AY–ը ընդհանուր ներքնաձիգ է, իսկ $\angle 1 = \angle 2$, որպես a և b զուգահեռ ուղիղները AY հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյուններ):

[1] Ասելով «X կետից անկյան կողմին տարված ուղղահայաց»՝ նկատի ունենք X կետից անկյան կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը: Նշենք որ չփռված անկյան դեպքում այդ ուղղահայացի հիմքը գտնվում է անկյան կողմի վրա:



ա) բ)

Նկ. 156

Հետևաբար՝ $XY = AB$: Այսպիսով՝ a ուղղի ցանկացած X կետի հեռավորությունը b ուղղից, իրոք, հավասար է AB–ին: Ակնհայտ է, որ b ուղղի բոլոր կետերն էլ a ուղղից գտնվում են նույն հեռավորության վրա: Թեորեմն ապացուցված է:

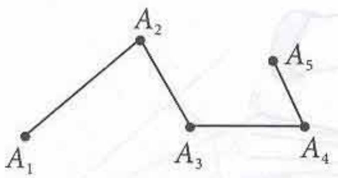
Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ զուգահեռ ուղիղներից մեկով շարժվող կետը միշտ գտնվում է մյուս ուղղից նույն հեռավորության վրա:

Զուգահեռ ուղիղներից մեկի կամայական կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից կոչվում է զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորություն:

Նշենք, որ զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորությունը հավասար է այդ ուղիղներից մեկի կետերից մինչև մյուս ուղղի կետերը եղած հեռավորություններից փոքրագույնին:

Դ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: Ճշմարիտ է նաև ապացուցված թեորեմի հակադարձ պնդումը, այն է՝ ***հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են տրված ուղղից և ընկած են նրա մի կողմում, գտնվում են այդ ուղղին զուգահեռ ուղղի վրա*** (ապացուցեք ինքնուրույն): Այս հատկության հիման վրա է կառուցված ատաղձագործության մեջ կիրառվող մի գործիք, որ կոչվում է *խազքաշ (նկ. 156(ա))*: Խազքաշի օգնությամբ փայտե չորսուի մակերևույթին նշագծում են զուգահեռ գծեր: Չորսուի եզրի երկայնքով տեղաշարժելիս խազքաշի մետաղյա ասեղը նշագծում է հատված, որը զուգահեռ է չորսուի եզրին *(նկ. 156(բ))*:

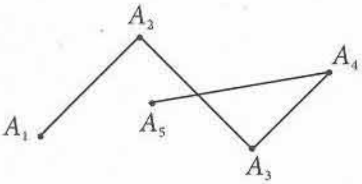
40. Բեկյալի երկարությունը



Նկ. 157

Դիտարկենք այնպիսի երկրաչափական պատկեր, որը կազմված է որոշակի ձևով փոխդասավորված հատվածներից: Նկար 157–ում պատկերված են մի քանի կետ՝ A_1–ը, A_2–ը, A_3–ը, A_4–ը, A_5–ը, որոնք հաջորդաբար միացված են A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 հատվածներով: Արդյունքում ստացվել է $A_1A_2A_3A_4A_5$ երկրաչափական պատկերը, որը կոչվում է *բեկյալ գիծ* կամ, պարզապես, *բեկյալ*: Ընդ որում՝ բեկյալի համար կարևոր է բավարարել մի պայման, այն է՝ կամայական երկու հարևան հատվածները պետք է չգտնվեն մի ուղղի վրա:

Հատվածների ծայրակետերը (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 կետերը) կոչվում են բեկյալի *գագաթներ*, դրանցից A_1–ը և A_5–ը *բեկյալի ծայրակետերն են* (A_1–ը՝ սկիզբը, A_5–ը՝ վերջը): Հատվածները, որոնցից կազմված է բեկյալը, կոչվում են *օղակներ*: Եթե բեկյալի ծայրակետերը համընկնում են, բեկյալը կոչվում է *փակ*: Փակ բեկյալի օրինակ է եռանկյունը:



Նկ. 158

Նկար 158–ում պատկերված է բեկյալ, որի ոչ հարևան օղակներից երկուսը՝ A_2A_3–ը և A_4A_5–ը, ունեն ընդհանուր կետ: Այն ինքնահատող բեկյալ է. այդպիսի բեկյալն անվանում են *ոչ պարզ բեկյալ*:

Մենք հիմնականում գործ կունենանք պարզ բեկյալի հետ, այսինքն՝ այնպիսի բեկյալի, որի ոչ հարևան օղակները ընդհանուր կետ չունեն:

Բեկյալը կազմված է հատվածներից (օղակներից), որոնցից յուրաքանչյուրն ունի երկարություն: *Բեկյալի բոլոր օղակների երկարությունների գումարը կոչվում է բեկյալի երկարություն:*

Բեկյալն օժտված է մի կարևոր հատկությամբ, այն է. ***բեկյալի երկարությունը մեծ է նրա ծայրակետերի հեռավորությունից:*** Այս պնդման ապացուցումը կատարենք երեք օղակ ունեցող $A_1A_2A_3A_4$ պարզ բեկյալի համար *(նկ. 159)*: A_1, A_2, A_3 կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա. ուրեմն տեղի ունի եռանկյան անհավասարությունը.

Նկ. 159

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3 \quad (1)$$

A_1, A_3, A_4 կետերի համար տեղի ունի $A_1A_3 + A_3A_4 \geq A_1A_4$ (2) ոչ խիստ անհավասարությունը: Այս դեպքում, անշուշտ, չենք կարող դնել > նշանը, որովհետև չի բացառվում, որ A_1, A_3, A_4 կետերը, որպես բեկյալի ոչ հարևան գագաթներ, գտնվեն մի ուղղի վրա:

Այժմ օգտվենք (1) և (2) անհավասարություններից. (2) անհավասարության ձախ մասում A_1A_3 գումարելին փոխարինենք ավելի մեծ՝ $A_1A_2 + A_2A_3$ գումարով, ստանում ենք. $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4$: Սա էլ հենց նշանակում է, որ $A_1A_2A_3A_4$ բեկյալի օղակների երկարությունների գումարը մեծ է բեկյալի ծայրակետերի հեռավորությունից:

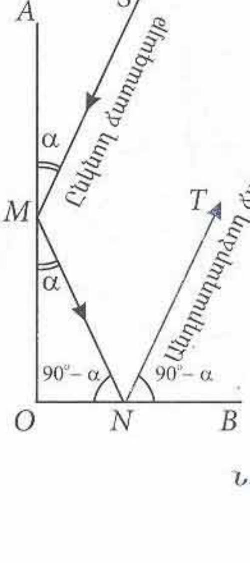
Նույն եղանակով ապացուցվում է պնդումը կամայական թվով օղակներ ունեցող բեկյալի համար:

Այս պնդումը մեկ անգամ ևս հաստատում է, որ *երկու կետերի միջև ամենակարճ ճանապարհը այդ կետերը միացնող հատվածն է:*

41.* Անկյունային անդրադարձիչ

Մենք գիտենք, որ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է: Այդ հատկությունն ընկած է պարզագույն անկյունային անդրադարձիչի կառուցվածքի հիմքում: Նախքան նրա կառուցվածքը նկարագրելը՝ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր: *OA և OB հայելիների կազմած անկյունը 90° է: Լուսային ճառագայթը α անկյան տակ ընկնում է OA հայելու վրա, անդրադառնալով, նրանից՝ ընկնում է OB հայելու վրա (նկ. 160): Ապացուցել, որ OA-ի վրա ընկնող և OB-ից անդրադարձող ճառագայթները զուգահեռ են:*

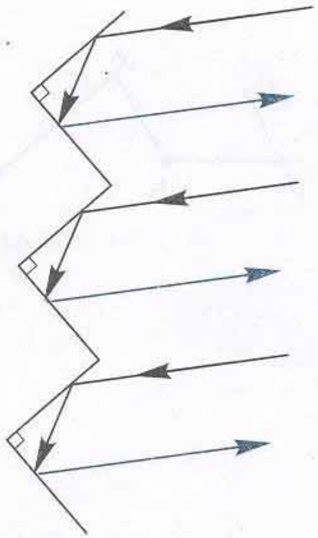


Նկ. 160

Լուծում: Ըստ լույսի անդրադարձման օրենքի՝ ինչպես ընկնող SM ճառագայթը, այնպես էլ MN ճառագայթը OA ուղղի հետ կազմում են հավասար՝ α անկյուններ: Քանի որ ΔMON-ը ուղղանկյուն եռանկյուն է,

*Աստղակիր կետերը բովանդակում են լրացուցիչ ծանոթացման նյութեր:

ուրեմն *MNO* անկյունը հավասար է 90°–α: Կրկին կիրառելով լույսի անդրադարձման օրենքը՝ ստանում ենք, որ ինչպես *MN* ճառագայթը, այնպես էլ անդրադարձող *NT* ճառագայթը *OB* ուղղի հետ կազմում են հավասար անկյուններ: Նկար 160–ը դիտելով՝ նկատում ենք, որ $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2\,(90° - \alpha) = 2\alpha$:



Նկ. 161

Ուրեմն՝ $\angle SMN + \angle MNT = 180°$: Հետևաբար՝ ընկնող *SM* ճառագայթը և անդրադարձող *NT* ճառագայթը զուգահեռ են, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ նկարագրենք անկյունային անդրադարձիչի կառուցվածքը:

Պարզագույն անկյունային անդրադարձիչը կազմված է մի քանի հայելուց, որոնք տեղադրված են այնպես, որ հարևան հայելիները կազմում են 90° անկյուն: Նկար 161–ում բեկյալ գծի տեսքով պատկերված է այդպիսի անդրադարձիչի ուրվագիծը: Պատկերացնենք, թե զուգահեռ ճառագայթների փունջն ընկնում է այդ անդրադարձիչի վրա (նկարում ընկնող ճառագայթները պատկերված են սլաքով նշված սև գծերով): Այդ դեպքում անդրադարձող ճառագայթները զուգահեռ կլինեն ընկնող ճառագայթներին (այդ ճառագայթները պատկերված են սլաքով նշված կապույտ գծերով): Այսպիսով՝ անկյունային անդրադարձիչը «հետ է վերադարձնում» իր վրա ընկնող զուգահեռ ճառագայթների փունջը, և դա արվում է այդ փնջի նկատմամբ նրա ցանկացած դասավորության դեպքում:

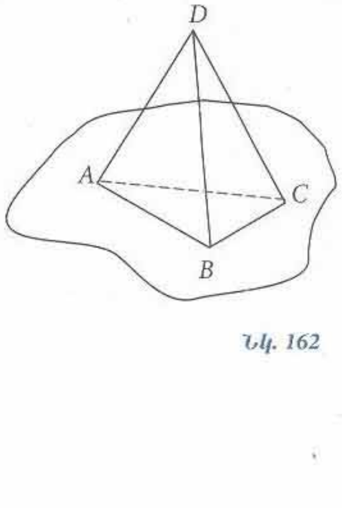
Անկյունային անդրադարձիչի այդ հատկությունն օգտագործվում է տեխնիկայում: Այսպես, օրինակ, անկյունային անդրադարձիչը տեղադրվում է հեծանվի հետևի անվածածկոցի վրա, որպեսզի այն «հետ վերադարձնի» ավտոմեքենայի ցոլարձակ լապտերի լույսը: Դա օգնում է ավտոմեքենայի վարորդին՝ գիշերը տեսնելու իր դիմացից գնացող հեծանիվը: Նշենք, որ գործնականում կիրառվող անկյունային անդրադարձիչներն ունեն ավելի բարդ կառուցվածք, քան այստեղ նկարագրված պարզագույն անդրադարձիչը: Սակայն դրանց բոլորի գործողության սկզբունքը նույնն է:

Անկյունային անդրադարձիչի բազմաթիվ այլ կիրաություններից բերենք ուշագրավ մի օրինակ: Անկյունային անդրադարձիչ է տեղադրվել Լուսին ուղարկված ավտոմատ կայաններից մեկի վրա: Երկրի մակերևույթից լազերային ճառագայթն արձակվել է դեպի Լուսնի մակերևույթի այն տեղամասը, որում գտնվել է այդ կայանը: Ճառագայթը «վերադարձել է» հենց այնտեղ, որտեղից արձակվել է: Չափելով ճառագայթի արձակման պահի և ազդանշանի վերադարձման պահի միջև ընկած ճշգրիտ ժամանակը, հաջողվել է բավական մեծ ճշգրտությամբ (մինչև 1 սմ) որոշել Երկրի և Լուսնի մակերևույթների միջև հեռավորությունը:

42. Պատկերացում քառանիստի մասին

Մինչև այժմ մենք ուսումնասիրել ենք միայն հարթության վրա գտնվող երկրաչափական պատկերներ: Սակայն մեզ շրջապատում են առարկաներ, որոնք հարթության վրա չեն «տեղավորվում». դրանք տարածական պատկերներ են: Մենք պետք է նկատի ունենանք, որ տարածության շատ կետեր տրված հարթության մեջ չեն գտնվում: Օրինակ՝ առաստաղից կախված լամպը չի գտնվում առաստաղի հարթության մեջ, սեղանին դրված ծաղկամանի կետերն ընկած չեն սեղանի հարթության մեջ և այլն: Այդպիսի բազմաթիվ օրինակներ կարող եք ներկայացնել ինքներդ:

Այժմ նկարագրենք տարածական մի այսպիսի պատկեր: Դիտարկենք հարթության վրա *ABC* եռանկյունը և այդ հարթության վրա չգտնվող *D* կետը *(նկ. 162)*: Ընդունենք, որ *A*, *B* և *C* կետերը հատվածներով միացված են նույն *D* կետին: Ստացված *DABC* տարածական պատկերը կազմված է չորս եռանկյունից, դրանք են՝ $\triangle ABC$-ն, $\triangle ADB$-ն, $\triangle ADC$-ն և $\triangle BDC$-ն: Նշված եռանկյուններով կազմված DABC պատկերը կոչվում է *քառանիստ*[2], այդ եռանկյունները կոչվում են նրա *նիստեր*: *A*, *B*, *C* և *D* կետերը կոչվում են քառանիստի *գագաթներ*, իսկ այդ կետերը միացնող հատվածները



Նկ. 162

[2] Քառանիստին անվանում են նաև *եռանկյուն բուրգ*:

(AB–ն, AC–ն, BC–ն, AD–ն, BD–ն, CD–ն)՝ քառանիստի *կողեր*: Այսպիսով՝ քառանիստն ունի 4 նիստ, 4 գագաթ, 6 կող: Դժվար չէ նկատել, որ քառանիստի յուրաքանչյուր կող միաժամանակ գտնվում է երկու նիստի վրա, իսկ յուրաքանչյուր գագաթ՝ երեք նիստի վրա:

Քառանիստի, ինչպես նաև տարածական այլ պատկերների հատկությունները ավելի հանգամանորեն մենք կուսումնասիրենք հետագայում:

Հարցեր և խնդիրներ

313. Կետից տարված են ուղղին ուղղահայաց և թեք, որոնց երկարությունների գումարը 17 սմ է, իսկ տարբերությունը՝ 1 սմ: Գտեք կետի հեռավորությունը ուղղից:

314. ABC հավասարակողմ եռանկյան մեջ տարված է AD կիսորդը: D կետի և AC ուղղի միջև հեռավորությունը 6 սմ է: Գտեք A գագաթի հեռավորությունը BC ուղղից:

315. CDE ուղղանկյուն եռանկյան CE ներքնաձիգի և CD էջի գումարը 31 սմ է, իսկ տարբերությունը՝ 3 սմ: Գտեք C գագաթի հեռավորությունը DE ուղղից:

316. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի միջնակետը հավասարահեռ է սրունքներից:

317. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB հիմքի վրա վերցված է M կետ, որը հավասարահեռ է սրունքներից: Ապացուցեք, որ CM–ը ABC եռանկյան բարձրությունն է:

318. Ուղիղն անցնում է հատվածի միջնակետով: Ապացուցեք, որ հատվածի ծայրակետերը հավասարահեռ են այդ ուղղից:

319. a և b զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը 3 սմ է, իսկ a և c զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը՝ 5 սմ: Գտեք b և c ուղիղների հեռավորությունը:

320. AB ուղիղը զուգահեռ է CD ուղղին: Գտեք այդ ուղիղների հեռավորությունը, եթե $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ սմ:

331. Տրված են ուղիղ և նրա վրա չգտնվող երկու կետ: Պատկերեք այդ կետերը միացնող բեկյալ, որի օղակներից յուրաքանչյուրը հատի այդ ուղիղը: Դիտարկեք այն դեպքերը, երբ տրված կետերը գտնվում են այդ ուղղի՝ ա) մի կողմում, բ) տարբեր կողմերում: Ի՞նչ օրինաչափություն եք նկատում օղակների թվերի համար:

332. Որքա՞ն կարող է լինել AB հատվածի երկարությունը, եթե նրա ծայրակետերը միացված են բեկյալով, որի օղակների երկարություններն են՝ ա) 6 սմ, 8 սմ, 10 սմ, բ) 2 սմ, 3,1 սմ և 5,3 սմ:

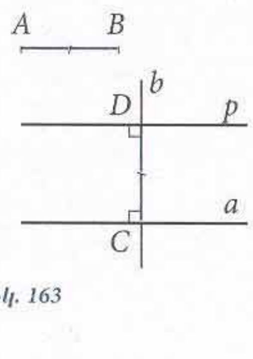
333. Քառանիստի բոլոր նիստերը 2սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուններ են: Գտեք քառանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

334. Քառանիստի բոլոր նիստերի պարագծերի գումարը 46 սմ է: Գտեք քառանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

Կառուցման խնդիրներ

335. Տրված են a ուղիղը և AB հատվածը: Կառուցեք a ուղղին զուգահեռ p ուղիղն այնպես, որ a և p ուղիղների միջև հեռավորությունը հավասար լինի AB–ին:

Լուծում: a ուղղի վրա նշենք որևէ կետ՝ C–ն, և այդ կետով տանենք a ուղղին ուղղահայաց b ուղիղը (նկ. 163. ուղղահայաց ուղիղներ կառուցելը մենք արդեն գիտենք): Այնուհետև b ուղղի՝ C կետից ելնող ճառագայթներից մեկի վրա տեղադրենք AB հատվածին հավասար CD հատվածը: D կետով տանենք b ուղղին ուղղահայաց p ուղիղը, որն էլ կլինի որոնելին (բացատրեք, թե ինչու):



Նկ. 163

Կառուցումից երևում է, որ տրված յուրաքանչյուր a ուղղի և ցանկացած AB հատվածի համար որոնելի ուղիղը կարելի է կառուցել, այսինքն՝ խնդիրը միշտ լուծում ունի: Սակայն նկատենք, որ այն ունի երկու լուծում (ուղիղներ p–ն և p_1–ը նկար 164–ում):

321*. Ապացուցեք, որ հարթության այն բոլոր կետերը, որոնք հավասարահեռ են տրված ուղղից և ընկած են նրա մի կողմում, գտնվում են այդ ուղղին զուգահեռ ուղղի վրա:

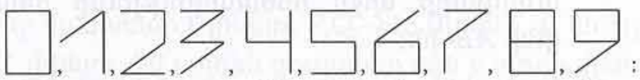
322. Տրված են ABC չփռված անկյունը և PQ հատվածը: Ի՞նչ է ներկայացնում այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք ընկած են այդ անկյան ներսում և գտնվում են BC ուղղից PQ հեռավորության վրա:

323. Ի՞նչ է ներկայացնում հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք հավասարահեռ են տրված երկու զուգահեռ ուղիղներից:

324. a և b ուղիղները զուգահեռ են: Ապացուցեք, որ բոլոր XY հատվածների միջնակետերը, որտեղ $X \in a$ և $Y \in b$, գտնվում են մի ուղղի վրա, որը զուգահեռ է a և b ուղիղներին և հավասարահեռ է նրանցից:

325. Ի՞նչ է ներկայացնում հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք գտնվում են տրված ուղղից տրված հեռավորության վրա:

326. Նկարում հատվածների միջոցով պատկերված են թվանշաններ: Դրանցից որո՞նք են՝ 1)պարզ բեկյալ, 2)պարզ փակ բեկյալ:



ա բ գ դ ե զ է ը թ ժ

327. Նվազագույնը քանի՞ օղակ ունի. ա) բեկյալը, բ) փակ բեկյալը:

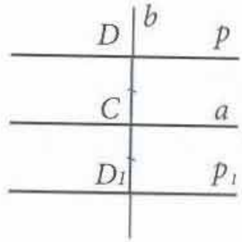
328. Առնվազն քանի՞ օղակ ունի բեկյալը, եթե այն ունի մի ուղղի վրա գտնվող ոչ հարևան օղակներ: Գծագրեք այդպիսի բեկյալ:

329. Տրված են ուղիղ և երկու կետ: Հնարավո՞ր է, արդյոք, այդ կետերը միացնել այնպիսի բեկյալով, որը չհատի տրված ուղիղը: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

330. Տրված է ուղիղ: Պատկերեք n օղակ ունեցող բեկյալ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), որի յուրաքանչյուր օղակը ուղղով տրոհվի երկու հատվածի:

336. Անկյան ներսում տրված է A կետը: Կառուցեք A կետով անցնող ուղիղ, որն անկյան կողմերից անջատում է հավասար հատվածներ:

337. Տրված են a և b հատվող ուղիղները և PQ հատվածը: a ուղղի վրա կառուցեք կետ, որը գտնվի b ուղղից PQ հեռավորության վրա:



Նկ. 164

338. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ա)ըստ երկու էջի, բ)ըստ էջի և նրան առընթեր սուր անկյան:

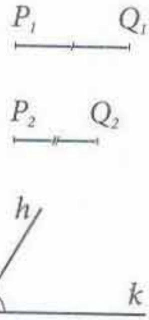
339. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի, նրան առընթեր անկյան և այդ կողմին տարված բարձրության:

Լուծում: Տրված են P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածները և hk անկյունը *(նկ. 165(ա))*: Պահանջվում է կառուցել ABC եռանկյուն այնպես, որ նրա կողմերից մեկը, ասենք՝ AB–ն, հավասար լինի P_1Q_1 հատվածին, նրան առընթեր անկյուններից մեկը, օրինակ՝ A անկյունը՝ տրված hk անկյանը, իսկ AB կողմին տարված CH բարձրությունը՝ տրված P_2Q_2 հատվածին:

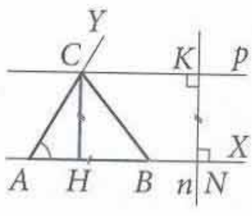
Կառուցենք տրված hk անկյանը հավասար XAY անկյունը և AX ճառագայթի վրա տեղադրենք տրված P_1Q_1 հատվածին հավասար AB հատվածը *(նկ. 165(բ))*: Որոնելի եռանկյան C գագաթը կառուցելու համար նկատենք, որ C կետից մինչև AB ուղիղը եղած հեռավորությունը հավասար է լինելու P_2Q_2–ին: Ուրեմն՝ C կետը ընկած է լինելու AB ուղղին զուգահեռ այն p ուղղի վրա, որի և AB ուղղի միջև հեռավորությունը հավասար է P_2Q_2–ին: Հետևաբար՝ որոնելի C կետը p ուղղի և AY ճառագայթի հատման կետն է:

Հիշենք, որ p ուղղի կառուցումը մենք արդեն գիտենք խնդիր 335–ից:

Ակնհայտ է, որ կառուցված ABC եռանկյունը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին. $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$:



ա)



բ)

Նկ. 165

340. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմի և դրանցից մեկին տարված բարձրության:

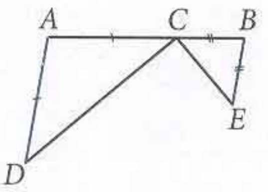
341. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմի և դրանցից մեկին տարված միջնագծի:

IV ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

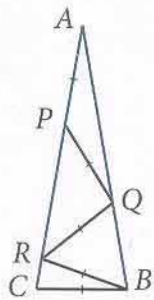
1. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմը:
2. Ո՞ր անկյունն է կոչվում եռանկյան արտաքին անկյուն: Ապացուցեք, որ եռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է եռանկյան այն երկու անկյան գումարին, որոնք իրեն կից չեն:
3. Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր եռանկյան մեջ կամ բոլոր անկյունները սուր են, կամ անկյուններից երկուսը սուր են, իսկ երրորդը՝ ուղիղ կամ բութ:
4. Ո՞ր եռանկյունն է կոչվում սուրանկյուն եռանկյուն: Ո՞ր եռանկյունն է կոչվում բութանկյուն եռանկյուն:
5. Ո՞ր եռանկյունն է կոչվում ուղղանկյուն եռանկյուն: Ինչպե՞ս են կոչվում ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը:
6. Ապացուցեք, որ եռանկյան մեջ՝ 1)ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն, 2)ընդհակառակը՝ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ կողմ:
7. Ապացուցեք, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը մեծ է յուրաքանչյուր էջից:
8. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:
9. Ապացուցեք, որ եռանկյան կողմերից յուրաքանչյուրը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից: Ո՞րն է եռանկյան անհավասարությունը:
10. Ապացուցեք, որ ուղղանկյուն եռանկյան երկու սուր անկյունների գումարը 90° է:
11. Ապացուցեք, որ ուղղանկյուն եռանկյան՝ 30°-ի անկյան դիմացի էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին: Ձևակերպեք և ապացուցեք հակադարձ պնդումը:
12. Ձևակերպեք և ապացուցեք ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշը՝ ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան:

13. Ձևակերպեք և ապացուցեք ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշը՝ ըստ ներքնաձիգի և էջի:
14. Բացատրեք, թե որ հատվածն է կոչվում տրված կետից տրված ուղղին տարված թեք:
15. Ապացուցեք, որ կետից ուղղին տարված ուղղահայացը փոքր է այդ կետից նույն ուղղին տարված յուրաքանչյուր թեքից:
16. Ո՞րն է կոչվում կետի հեռավորություն ուղղից:
17. Ձևակերպեք և ապացուցեք հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունը:
18. Ձևակերպեք և ապացուցեք անկյան կիսորդի հատկությունը:
19. Ապացուցեք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս ուղղից:
20. Ո՞րն է կոչվում զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորություն:
21. Նկարագրեք, թե ինչ է բեկյալ գիծը: Բացատրեք, թե ինչ են բեկյալի օղակները, գագաթները, ծայրակետերը:
22. Ո՞ր բեկյալն է կոչվում փակ բեկյալ: Պարզաբանեք, թե որն է կոչվում պարզ և որը՝ ոչ պարզ բեկյալ:
23. Ո՞րն է կոչվում բեկյալի երկարություն: Ապացուցեք, որ բեկյալի երկարությունը մեծ է նրա ծայրակետերի հեռավորությունից:
24. Ապացուցեք, որ *ABC* բեկյալի երկարությունը փոքր է *ABCD* բեկյալի երկարությունից:
25. Նկարագրեք, թե ինչ կառուցվածք ունի անկյունային անդրադարձիչը:
26. Անկյունային անդրադարձիչի ո՞ր հատկության վրա է հիմնված նրա կիրառությունը տեխնիկայում. նկարագրեք անդրադարձիչի կիրառության օրինակ:
27. Նկարագրեք, թե ինչ երկրաչափական պատկեր է քառանիստը: Քառանիստի ի՞նչ տարրեր գիտեք:

Լրացուցիչ խնդիրներ



Նկ. 166



Նկ. 167

342. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ B և C հավասար անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ BOC անկյունը հավասար է եռանկյան՝ B գագաթին հարակից արտաքին անկյանը:

343. ADC եռանկյան AD կողմի վրա B կետը նշված է այնպես, որ $BC = BD$: Ապացուցեք, որ DC ուղիղը զուգահեռ է ABC անկյան կիսորդին:

344. Նկար 166–ում $AD \parallel BE$, $AC = AD$ և $BC = BE$: Ապացուցեք, որ $\angle DCE$–ն ուղիղ անկյուն է:

345. Նկար 167–ում $AP = PQ = QR = RB = BC$, $AB = AC$: Գտեք A անկյունը:

346. Ապացուցեք, որ բութանկյուն եռանկյան մեջ բութ անկյան գագաթից տարված բարձրության հիմքը ընկած է եռանկյան կողմի վրա, իսկ սուր անկյունների գագաթներից տարված բարձրությունների հիմքերն ընկած են կողմերի շարունակությունների վրա:

347. A կետից a ուղղին տարված են AH ուղղահայացը և AM_1, AM_2 թեքերը: Ապացուցեք, որ՝ ա) եթե $HM_1 = HM_2$, ապա $AM_1 = AM_2$, բ) եթե $HM_1 < HM_2$, ապա $AM_1 < AM_2$:

348. A կետից a ուղղին տարված են AH ուղղահայացը և AM_1, AM_2 թեքերը: Ապացուցեք, որ՝ ա) եթե $AM_1 = AM_2$, ապա $HM_1 = HM_2$, բ) եթե $AM_1 < AM_2$, ապա $HM_1 < HM_2$:

349*. A և B բնակավայրերը գտնվում են ուղղագիծ ճանապարհի մի կողմում: Այդ ճանապարհի վրա որտե՞ղ տեղադրել C կանգառը, որպեսզի հեռավորությունների $AC + CB$ գումարը լինի փոքրագույնը:

350*. Ապացուցեք, որ եթե M կետը գտնվում է ABC եռանկյան ներսում, ապա $MB + MC < AB + AC$:

351. Ապացուցեք, որ եռանկյան ներսում գտնվող յուրաքանչյուր կետից մինչև գագաթները եղած հեռավորությունների գումարը փոքր է եռանկյան պարագծից:

352. Ապացուցեք, որ եթե $AB = AC + CB$, ապա A, B և C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

353. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված է բարձրություն: Ապացուցեք, որ տրված եռանկյունը և առաջացած երկու եռանկյուններն ունեն համապատասխանաբար հավասար անկյուններ:

354. ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը 37 սմ է, իսկ B գագաթին հարակից արտաքին անկյունը՝ $60°$: Գտեք C գագաթի հեռավորությունը AB ուղղից:

355. AB և AC անհավասար կողմերով եռանկյան մեջ տարված են AH բարձրությունը և AD կիսորդը: Ապացուցեք, որ HAD անկյունը հավասար է B և C անկյունների կիսատարբերությանը:

356. Ապացուցեք, որ հավասար եռանկյունների հավասար կողմերին տարված բարձրությունները հավասար են:

357. Հատվածը եռանկյան գագաթը միացնում է հանդիպակաց կողմի որևէ կետին: Ապացուցեք, որ այդ հատվածը փոքր է, քան մյուս երկու կողմերից մեծը:

358. Ի՞նչ է ներկայացնում հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք հավասարահեռ են տրված երկու հատվող ուղիղներից:

359*. Կառուցեք եռանկյունը՝ ըստ երկու կողմի և երրորդ կողմին տարված միջնագծի:

360. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ա) ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան, բ) ըստ էջի և նրա հանդիպակաց անկյան, գ) ըստ ներքնաձիգի և էջի:

361*. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի, նրան տարված բարձրության և մյուս կողմերից մեկին տարված միջնագծի:

362. Տրված է ABC եռանկյունը: Կառուցեք AC ուղղին զուգահեռ DE հատվածն այնպես, որ D և E կետերը գտնվեն AB և BC կողմերի վրա և $DE = AD + CE$:

363. Տրված են ABC հավասարակողմ եռանկյունը և նրա AC կողմի վրա B_1 կետը: BC և AB կողմերի վրա A_1 և C_1 կետերը կառուցեք այնպես, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը լինի հավասարակողմ:

364*. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ անկյան և այդ անկյան գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի:

365*. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի և այդ կողմին տարված բարձրության ու միջնագծի:

366*. Տրված է A ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունը: AB կողմի վրա կառուցեք M կետ, որը BC ուղղից գտնվի AM հեռավորության վրա:

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

I գլխի վերաբերյալ խնդիրներ

367. Դիցուք՝ AB հատվածի երկարությունը CD չափման միավորով արտահայտող թիվը a–ն է, իսկ CD հատվածի երկարությունը AB չափման միավորով արտահայտող թիվը՝ b–ն: Միմյանց հետ ինչպե՞ս են կապված a և b թվերը:

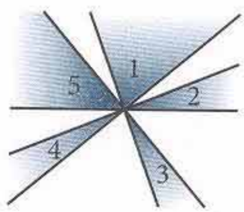
368. AB հատվածի երկարությունը E_1F_1 չափման միավորով արտահայտող թիվը m–ն է, իսկ E_2F_2 չափման միավորով արտահայտող թիվը՝ n–ը: Ո՞ր թիվն է E_2F_2 չափման միավորով արտահայտում E_1F_1 հատվածի երկարությունը:

369. Դիցուք՝ hk և hl անկյունները կից են, և նրանցից փոքրը $\angle hk$–ն է: Ապացուցեք, որ

$\angle hk = 90° - \frac{1}{2}$ $(\angle hl - \angle hk)$ և

$\angle hl = 90° + \frac{1}{2}$ $(\angle hl - \angle hk)$:

370. Հինգ ուղիղներ հատվում են մի կետում *(նկ. 168)*: Գտեք 1, 2, 3, 4 և 5 անկյունների գումարը:



Նկ. 168

371. Տրված են զույգ առ զույգ հատվող վեց ուղիղ: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու ուղղի հատման կետով անցնում է տրված այդ ուղիղներից առնվազն ևս մեկը: Ապացուցեք, որ այդ բոլոր ուղիղներն անցնում են մի կետով:

372. Տրված են վեց կետեր: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու կետով անցնող ուղիղը պարունակում է տրված այդ կետերից առնվազն ևս մեկը: Ապացուցեք, որ այդ բոլոր կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

II գլխի վերաբերյալ խնդիրներ

373. C_1 և C_2 կետերն ընկած են AB ուղղի տարբեր կողմերում և դասավորված են այնպես, որ $AC_1 = BC_2$, $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$: Ապացուցեք, որ C_1C_2 ուղիղն անցնում է AB հատվածի միջնակետով:

374. Ապացուցեք, որ եթե մի եռանկյան անկյունը, դրան առընթեր կողմը և երկու մյուս կողմերի գումարը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան անկյանը, դրան առընթեր կողմին և երկու մյուս կողմերի գումարին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

375. Մի եռանկյան կողմը և երկու անկյունները հավասար են մյուս եռանկյան որևէ կողմին և որևէ երկու անկյանը: Այդ եռանկյունները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել անհավասար:

376. Մի եռանկյան անկյունը և երկու կողմերը հավասար են մյուս եռանկյան որևէ անկյանը և որևէ երկու կողմին: Այդ եռանկյունները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել անհավասար:

377. AB և CD հատվածները հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ $OC = OD$, եթե $AC = AO = BO = BD$:

III և IV գլուխների վերաբերյալ խնդիրներ

378. *ABC* եռանկյան *B* և *C* գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները հատվում են *O* կետում: Գտեք *BOC* անկյունը, եթե *A* անկյունը հավասար է α:

379. Տրված եռանկյան գագաթներից յուրաքանչյուրով տարված է եռանկյան տվյալ գագաթով անցնող կիսորդին ուղղահայաց ուղիղ: Այդ ուղիղների հատվածները տրված եռանկյան կողմերի հետ միասին կազմում են երեք եռանկյուն: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունների անկյունները համապատասխանաբար հավասար են:

380. Հետևյալ դեպքերից յուրաքանչյուրի համար որոշեք եռանկյան տեսքը. ա) ցանկացած երկու անկյան գումարը մեծ է 90°-ից, բ) յուրաքանչյուր անկյունը փոքր է երկու մյուս անկյունների գումարից:

381. Ապացուցեք, որ եռանկյան անկյունը սուր է, ուղիղ է կամ բութ է, եթե այդ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը համապատասխանաբար մեծ է, հավասար է, կամ փոքր է, քան այդ անկյան հանդիպակաց կողմի կեսը:

382. *BC* հիմքով *ABC* հավասարասրուն եռանկյան ներսում *M* կետը վերցված է այնպես, որ $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$: Գտեք *AMC* անկյունը, եթե $\angle BAC = 80°$:

383. Ապացուցեք, որ եռանկյան տարբեր կողմերի վրա ծայրակետեր ունեցող հատվածներից յուրաքանչյուրը մեծ չէ այդ եռանկյան ամենամեծ կողմից:

384. BB_1 հատվածը ABC եռանկյան կիսորդ է: Ապացուցեք, որ $BA > B_1A$ և $BC > B_1C$:

385. ABC եռանկյան ներսում D կետը վերցված է այնպես, որ $AD = AB$: Ապացուցեք, որ $AC > AB$:

386. ABC եռանկյան մեջ, որի AB կողմը մեծ է AC կողմից, տարված է AD կիսորդը: Ապացուցեք, որ $\angle ADB > \angle ADC$, $BD > CD$:

387. Ապացուցեք հետևյալ թեորեմը. եթե եռանկյան կիսորդը միջնագիծ է, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

388. Եռանկյան երկու կողմերն իրար հավասար չեն: Ապացուցեք, որ դրանց ընդհանուր գագաթից տարված միջնագիծը այդ կողմերից փոքրի հետ կազմում է ավելի մեծ անկյուն:

389. ABC եռանկյան մեջ, որտեղ $AB \neq AC$, տարված է AM հատվածը, որը A գագաթը միացնում է BC կողմի կամայական M կետին: Ապացուցեք, որ AMB և AMC եռանկյուններն իրար հավասար չեն:

390. ABC եռանկյան A գագաթով տարված է A անկյան կիսորդին ուղղահայաց ուղիղ, իսկ B գագաթից տարված է այդ ուղղին ուղղահայաց՝ BH–ը: Ապացուցեք, որ BCH եռանկյան պարագիծը մեծ է ABC եռանկյան պարագծից:

391. ABC եռանկյան մեջ, որում $AB < AC$, տարված են AD կիսորդը և AH բարձրությունը: Ապացուցեք, որ H կետն ընկած է DB ճառագայթի վրա:

392. Ապացուցեք, որ անհավասար էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան կիսորդը կիսում է այդ նույն գագաթից տարված միջնագծի ու բարձրության միջև ընկած անկյունը:

393. Եռանկյան անկյուններից մեկի գագաթից տարված միջնագիծը և բարձրությունը այդ անկյունը բաժանում են երեք հավասար անկյունների: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

394. ABC եռանկյան AA_1 բարձրությունը փոքր չէ BC կողմից, իսկ BB_1 բարձրությունը՝ AC կողմից: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

395. Ապացուցեք, որ ոչ հավասարասրուն եռանկյան կիսորդի հիմքը գտնվում է այդ նույն գագաթից տարված միջնագծի և բարձրության հիմքերի միջև:

Կառուցման խնդիրներ

Նկարագրենք մի ընթացակարգ, որով սովորաբար լուծում են կառուցման խնդիրները: Այն կազմված է չորս մասից:

1. Խնդրի լուծման եղանակի որոնում, որ կատարվում է խնդրի տվյալների և որոնելի տարրերի միջև կապեր հաստատելու միջոցով: Այս մասը կոչվում է խնդրի *վերլուծություն:* Վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս կազմելու խնդրի լուծման պլանը:

2. *Կառուցման* կատարումը՝ ըստ կազմված պլանի:

3. *Ապացուցումն* այն բանի, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

4. Խնդրի *հետազոտումը*, այսինքն՝ պարզաբանումն այն հարցի, թե արդյոք ցանկացած տվյալների դեպքում խնդիրն ունի լուծում, և եթե այո, ապա քանի՞ լուծում:

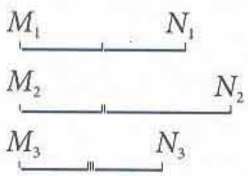
խնդրի բավականաչափ պարզ լինելու դեպքում առանձին մասերը, ասենք՝ վերլուծությունը կամ հետազոտումը կարող են բաց թողնվել: Այդպես էինք մենք վարվում կառուցման պարզագույն խնդիրներ լուծելիս: Այժմ դիտարկենք ավելի բարդ խնդիրներ:

396. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմի և երրորդ կողմին տարված բարձրության:

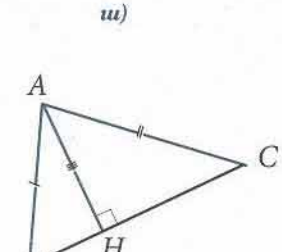
Լուծում: Տրված են երեք հատվածներ՝ M_1N_1–ը, M_2N_2–ը, M_3N_3–ը *(նկ. 169(ա))*: Պահանջվում է կառուցել այնպիսի ABC եռանկյուն, որի երկու կողմերը, ասենք՝ AB–ն և AC–ն, համապատասխանաբար հավասար են տրված M_1N_1 և M_2N_2 հատվածներին, իսկ AH բարձրությունը՝ M_3N_3 հատվածին:

Խնդիրը լուծենք ըստ նկարագրված ընթացակարգի:

Վերլուծություն: Խնդրի լուծման ուղին որոշելու համար՝ խորհուրդ է տրվում կատարել որոնելի պատկերի նկար–ուրվագիծ՝ սկսելով «ենթադրենք խնդիրը լուծված է» դատողությամբ, իսկ այնուհետև այդ նկարի վրա շարունակել փնտրել խնդրի լուծման բանալին: Առաջնորդվելով այդ խորհրդով՝ ենթադրենք, թե որոնելի ABC եռանկյունը կառուցված է *(նկ. 169(բ))*: Մենք տեսնում ենք, որ AB կողմը և AH բարձրությունը ծառայում են որպես ABH ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգ և էջ: Ուրեմն՝ ABC եռանկյան կառուցումը կարելի է կատարել ըստ հետևյալ պլանի. սկզբում կառուցել ABH ուղղանկյուն եռանկյունը, իսկ հետո կառուցումը լրացնել մինչև ABC եռանկյունը:



ա)



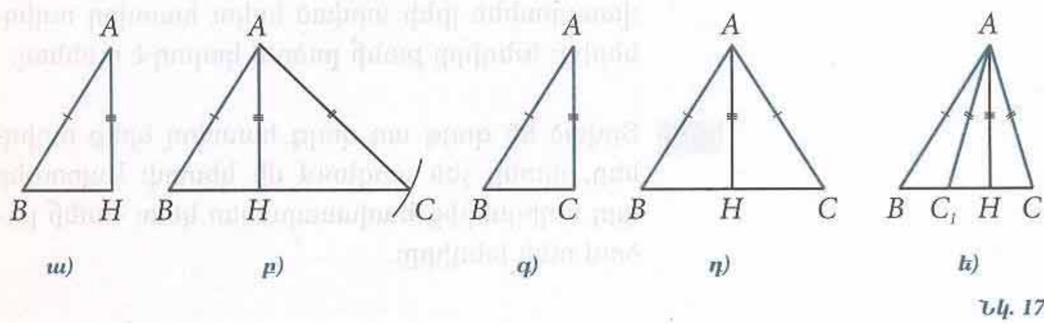
բ)

Նկ. 169

Կառուցում: Կառուցենք ABH ուղղանկյուն եռանկյունը, որի AB ներքնաձիգը հավասար է տրված M_1N_1 հատվածին, իսկ AH էջը՝ տրված M_3N_3 հատվածին (թե դա ինչպես անել, մենք արդեն գիտենք): 170(ա) նկարում պատկերված է արդեն կառուցված ABH եռանկյունը: Այնուհետև տանենք A կենտրոնով և M_2N_2 շառավիղով շրջանագիծ: Այդ շրջանագծի և BH ուղղի հատման կետերից մեկը նշանակենք C տառով: Տանելով BC և AC հատվածները՝ ստանում ենք որոնելի ABC եռանկյունը *(նկ. 170(բ))*:

Ապացուցում: ABC եռանկյունը, իրոք, որոնելին է, քանի որ ըստ կառուցման՝ AB կողմը հավասար է M_1N_1-ին, AC կողմը՝ M_2N_2-ին, իսկ AH բարձրությունը՝ M_3N_3-ին: Այսպիսով՝ ABC եռանկյունը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին:

Հետազոտում: Նախ նկատենք, որ խնդիրը ոչ բոլոր դեպքերում ունի լուծում. դա կախված է տրված M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 հատվածներից: Իսկապես, եթե M_1N_1 և M_2N_2 հատվածներից թեկուզ մեկը փոքր լինի M_3N_3-ից, ապա խնդիրը լուծում չի ունենա: Բանն այն է, որ AB կամ AC թեքերը չեն կարող փոքր լինել AH ուղղահայացից: Խնդիրը լուծում չունի նաև այն դեպքում, երբ $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (բացատրեք, թե ինչու): Իսկ մյուս դեպքերում խնդիրը լուծում ունի: Ընդ որում, եթե $M_1N_1 > M_3N_3$ և $M_2N_2 = M_3N_3$, ապա խնդիրն ունի միակ լուծում, այդ դեպքում AC կողմը համընկնում է AH բարձրությանը և, ուրեմն, որոնելի եռանկյունը կլինի ուղղանկյուն եռանկյուն *(նկ. 170(գ))*: Եթե $M_1N_1 > M_3N_3$ և $M_2N_2 = M_1N_1$, ապա խնդիրը դարձյալ ունի միակ լու-



Նկ. 170

ծում. այդ դեպքում ABC եռանկյունը հավասարասրուն է *(նկ. 170(դ))*: Վերջապես, եթե $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ և $M_1N_1 \neq M_2N_2$, ապա խնդիրն ունի երկու լուծում՝ ABC և ABC_1 եռանկյունները *(նկ. 170(ե))*:

397. Տրված են երկու՝ A և B կետերը և a ուղիղը, որը չի անցնում այդ կետերով: a ուղղի վրա կառուցեք տրված A և B կետերից հավասարահեռ կետ: Արդյո՞ք խնդիրը միշտ լուծում ունի:

398. Կառուցեք կետ, որը գտնվի տրված շրջանագծի վրա և հավասարահեռ լինի տրված հատվածի ծայրակետերից: Խնդիրը քանի՞ լուծում կարող է ունենալ:

399. Տրված երեք կետերով տարեք շրջանագիծ: Արդյո՞ք խնդիրը միշտ լուծում ունի:

400. A և B կետերը գտնվում են a ուղղի մի կողմում: Կառուցեք a ուղղի վրա M կետն այնպես, որ $AM + MB$ գումարը փոքր լինի $AX + XB$ գումարից, որտեղ X-ը a ուղղի՝ M-ից տարբեր կամայական կետ է:

401. Կառուցեք ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, եթե տրված են B սուր անկյունը և BD կիսորդը:

402. Տրված շրջանագծի վրա կառուցեք կետ, որը հավասարահեռ լինի տրված երկու հատվող ուղիղներից: Խնդիրը քանի՞ լուծում կարող է ունենալ:

403. Տրված են զույգ առ զույգ հատվող երեք ուղիղներ, որոնք չեն անցնում մի կետով: Կառուցեք այդ ուղիղներից հավասարահեռ կետ: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

404. Տրված են O կենտրոնով շրջանագիծը և նրանից դուրս A կետը: A կետով տարեք ուղիղ, որը շրջանագիծը հատի այնպիսի B և C կետերում, որ $AB = BC$:

405. Կառուցեք եռանկյուն պարագծով, անկյուններից մեկով և մյուս անկյան գագաթից տարված բարձրությունով:

406. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ պարագծի և երկու անկյան:

407. Կառուցեք եռանկյուն կողմով, դրան առընթեր անկյունների տարբերությունով և մյուս երկու կողմերի գումարով:

ՈՐՈՇ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Երկրաչափական պարզագույն տեղեկություններ բովանդակող առաջին գրավոր վկայությունը մեզ հասել է Հին Եգիպտոսից: Այն վերագրվում է մ.թ.ա. XVIII դարին: Նրանում ամփոփված են որոշ պատկերների ու մարմինների մակերեսներն ու ծավալները հաշվելու կանոններ: Այդ կանոններն ստեղծվել են զուտ գործնական եղանակով՝ առանց դրանց հիմնավորմանը վերաբերող տրամաբանական որևէ ապացուցումների:

Երկրաչափության՝ իբրև մաթեմատիկական գիտության, կայացումը տեղի է ունեցել ավելի ուշ, և այն կապված է հույն գիտնականներ Թալեսի (մոտ մ.թ.ա. 625–547 թթ.), Պյութագորասի (մոտ մ.թ.ա. 580–500 թթ.), Դեմոկրիտի (մոտ մ.թ.ա. 460–370 թթ.), Էվկլիդեսի (մ.թ.ա. III դ.) և այլոց անունների հետ: Էվկլիդեսի հանրահայտ «Սկզբունքներ» ստեղծագործության մեջ համակարգված են երկրաչափական՝ մինչ այդ հայտնի բոլոր հիմնական տեղեկությունները: Սակայն գլխավորն այն է, որ «Սկզբունքներում» երկրաչափության կառուցման համար մշակվել և կիրառվել է աքսիոմակարգային մոտեցում, այն է՝ նախապես ձևակերպել հիմնադրույթները (աքսիոմները), իսկ հետո՝ դրանց հիման վրա դատողությունների միջոցով ապացուցել մնացած դրույթները (թեորեմները): Ի դեպ՝ նման մոտեցման կարելիության մասին առաջինը հիշատակել է հույն մեծանուն գիտնական Արիստոտելը (մոտ մ.թ.ա. 384–322 թթ.): Այդ եղանակով ստացված արդյունքներն օգտագործվել են ինչպես գործնական, այնպես էլ հետագա գիտական հետազոտական աշխատանքներում:

Էվկլիդեսի առաջարկած աքսիոմներից մի քանիսը ներկայումս էլ կիրառվում են երկրաչափության դասընթացներում: Դրանց մի մասը, ժամանակակից ձևակերպումներով, տեղ է գտել նաև մեր դասընթացում, ինչպես, օրինակ. «Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը»:

Երկրաչափության տարբեր հարցերի հետազոտության ասպարեզում մեծ ներդրում են ունեցել հույն գիտնականներ Արքիմեդը (մոտ մ.թ.ա. 287–212 թթ.), Ապոլոնիսը (մ.թ.ա. III դ.) և այլոք:

Հետագա դարերի ընթացքում երկրաչափության զարգացումն ունեցել է հանդարտ ընթացք, իսկ այն որակապես նոր փուլ է մտել միայն շատ դարեր անց՝ մ.թ. XVII դարում: Դա կապված է եղել այդ ժամանակաշրջանում հանրահաշվում կուտակված նվաճումների հետ: Ֆրանսիացի ականավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտը (1596–1650) առաջարկել է երկրաչափական խնդիրների լուծման մի հրաշալի մոտեցում: Իր «Երկրաչափության» մեջ (1637) նա ներմուծել է կոորդինատների մեթոդը, որով սերտ կապ է հաստատվում երկրաչափության և հանրահաշվի միջև. դա թույլ է տալիս երկրաչափական խնդիրները փոխադրել (թարգմանել) հանրահաշվի լեզվով, և դրանք լուծել հանրահաշվական մեթոդներով:

Երկրաչափության զարգացման մեջ նշանակալից դեր է ունեցել այն աքսիոմը, որը Էվկլիդեսի «Սկզբունքներում» կրում է հինգերորդ պոստուլատ անվանումը: Այդ պոստուլատի՝ Էվկլիդեսի ձևակերպումը բավական բարդ է*: Այդ պատճառով, սովորաբար, այն փոխարինվում է դրան համարժեք՝ զուգահեռ ուղիղների աքսիոմով, այն է՝ տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

* Հինգերորդ պոստուլատը. «Եվ եթե ուղիղը, որը թեքված է երկու ուղիղների հանդեպ, կազմում է ներքին՝ մի կողմում ընկած և երկու ուղիղ անկյուններից փոքր անկյուններ, ապա այդ ուղիղներն անսահմանորեն շարունակվելով՝ կհանդիպեն այն կողմում, որտեղ այդ անկյունները փոքր են երկու ուղիղ անկյուններից»:

Դարեր շարունակ շատ գիտնականներ ջանքեր են գործադրել, որպեսզի ապացուցեն հինգերորդ պոստուլատը: Բանն այն է, որ ձգտում կար աքսիոմների թիվը հասցնել նվազագույնի: Իսկ գիտնականներին թվում էր, թե հիմք ընդունելով մնացած աքսիոմները՝ հնարավոր կլինի հինգերորդ պոստուլատը՝ որպես թեորեմ, ապացուցել և այդպիսով՝ կրճատել աքսիոմների թիվը: Սակայն որքան էլ համառ էին գիտնականների ջանքերը, հինգերորդ պոստուլատն ապացուցելու յուրաքանչյուր փորձ դատապարտվում էր անհաջողության: Ահա XVIII դարի վերջում որոշ երկրաչափների մոտ միտք հղացավ, որ այդ պոստուլատն ապացուցել հնարավոր չէ: Այդ հիմնահարցի լուծումը հայտնաբերել է ռուս մեծ մաթեմատիկոս, Կազանի համալսարանի պրոֆեսոր և ապա ռեկտոր Նիկոլայ Լոբաչևսկին (1792–1856):

Ինչպես շատերը, Լոբաչևսկին ևս ցանկացել է ապացուցել Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը և դա փորձել է՝ կատարելով հակառող ենթադրություն: Նա ենթադրել է, որ տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում են այդ ուղղին չհատվող մի քանի ուղիղներ: Ելնելով դրանից՝ նա փորձել է ստանալ այնպիսի հետևություն, որը հակասում է մյուս աքսիոմներին կամ արդեն ապացուցված թեորեմներին: Եթե ստացվեր այդպիսի հակառող հետևություն, ապա դա կնշանակեր, որ արված ենթադրությունը ճշմարիտ չէ, և, ուրեմն, ճշմարիտ է դրա հակառակ պնդումը, այն է՝ տվյալ ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղիղը չհատող միայն մեկ ուղիղ: Դրանով իսկ կապացուցվեր Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը:

Սակայն Լոբաչևսկին հակասական պնդումներ չի ստացել: Դա հիմք է տվել նրան՝ կատարելու մի նշանավոր եզրակացություն. կարելի է կառուցել մի ուրիշ երկրաչափություն, որը տարբեր է Էվկլիդեսի երկրաչափությունից: Ավելին՝ Լոբաչևսկին կառուցել է այդպիսի երկրաչափություն. այդ հայտնագործության մասին նա հաղորդել է 1826 թ.:

Այդ շրջանում նույնանման հայտնագործություն կատարել է նաև հունգարացի մաթեմատիկոս Յ. Բոյային (1802–1860), որն իր արդյունքները հրապարակել է քիչ ավելի ուշ՝ 1832 թվին: Գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Կ. Ֆ. Գաուսի (1777–1855) ձեռագրերում ևս արտահայտված են գաղափարներ, որոնք մոտ են Լոբաչևսկու և Բոյայիի գաղափարներին: Սակայն նա, խուսափելով քննադատություններից, այդ աշխատանքները չի հրապարակել:

Նոր երկրաչափության հայտնագործությունը վիթխարի ազդեցություն է ունեցել գիտության զարգացման վրա, այն լայն կիրառություն ունի բնագիտության մեջ, հսկայական է նրա դերը մաթեմատիկայի և, մասնավորապես, հենց երկրաչափության հետագա զարգացման գործընթացում: Դրա առավել ցայտուն դրսևորումն է հատկապես տարածության մասին մեր պատկերացումների հետագա խորացումը: Չէ՞ որ նախքան նոր երկրաչափության բացահայտումը թվում էր, թե մեր շրջակա տարածության երկրաչափությունը կարող է լինել միայն էվկլիդեսյան երկրաչափությունը: Սակայն երբ պարզվում է, որ հնարավոր է նաև այլ երկրաչափություն, բնականաբար, բարձրանում է այս կամ այն երկրաչափության ճշմարտացիության հարցը, ինչը կարող է լուծվել միայն փորձնական ստուգման միջոցով: Ժամանակակից գիտությունը հաստատում է, որ Էվկլիդեսյան երկրաչափությունը, թեև բավականաչափ մեծ ճշգրտությամբ, այնուհանդերձ, միայն մոտավորապես է արտացոլում մեր շրջակա տարածության հատկությունները, իսկ առավել մեծ՝ տիեզերական ոլորտներում այն նկատելի տարբերություն ունի իրական տարածության երկրաչափությունից:

Մաթեմատիկայի բուռն թափով զարգացումը XIX դարում առաջ է բերել մի շարք նշանակալից հայտնագործություններ նաև երկրաչափության բնագավառում: Դրանցից մեկը գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս Բ. Ռիմանի (1826–1866) ստեղծած երկրաչափությունն է: Այն ընդհանրացնում է Էվկլիդեսյան երկրաչափությունը և Լոբաչևսկու երկրաչափությունը:

Ընթերցողն իրավացիորեն կարող է հարցնել. իսկ արդյոք անհակասակա՞ն են էվկլիդեսյան կամ ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափությունները, չի՞ կարող պատահել այնպես, որ հետագա ծավալման ընթացքում այս կամ այն երկրաչափության մեջ ի հայտ գան հակասական հետևություններ: Այդ խնդիրը սերտորեն կապված է երկրաչափություններից յուրաքանչյուրը որոշող աքսիոմների համակարգի անհակասականության, լրիվության և անկախության հիմնահարցերի հետ: Նշված հիմնահարցերը վերաբերում են մի առանձին գիտաճյուղի, որը կոչվում է *«Երկրաչափության հիմունքներ»*: Այդ հիմնահարցերի լուծման գործում վիթխարի ավանդ ունի գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Դ. Հիլբերտը (1862–1943):

Մենք շատ հակիրճ շոշափեցինք ընդամենը մի քանի հանգամանքներ երկրաչափության զարգացման պատմությունից: Իսկ ավելի հանգամանալի տեղեկություններ այդ հարցերի շուրջ կարելի է ստանալ լրացուցիչ գրականությունից: Մնում է ավելացնել, որ ներկայումս երկրաչափությունը լայն կիրառություններ ունի բնագիտական տարբեր գիտաճյուղերում՝ ֆիզիկայում, քիմիայում, կենսաբանության մեջ և այլուր: Անգնահատելի է երկրաչափության դերը կիրառական գիտություններում, օրինակ՝ մեքենաշինության, երկրաբանության, քարտեզագրության, ինչպես նաև ճարտարագիտության մեջ: Երկրաչափության մեթոդները գործնականում լայնորեն կիրառվում են գիտության, տեխնիկայի և, առհասարակ, մարդկային գործունեության գրեթե բոլոր բնագավառներում և, անշուշտ, բուն մաթեմատիկայում:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I

2. բ) Երեք կետ կամ մեկ կետ: 4. Չորս ուղիղ: 6. Երեք հատված: 8. ա) AB և AC, BC և BA: 15. Չորս: 17. h և l: 18. $OB < OA$, $OC > OA$, $OB < OC$: 19. ա) Այո, բ) ոչ: 20. ա) B, C, D, բ) CE, գ) AE, BD: 21. $AB < DB$ 22. $AC < DE$: 23. $\angle AOC < \angle AOB$: 24. ա) Այո, բ) ոչ: 25. ա) OB, OD, OC, բ) $\angle BOD$, $\angle AOE$: 26. Այո, $\angle AOC = \angle DOB$: 27. Այո, $\angle AOB = \angle DOC$: 28. Այո: 29. Այո: 35. Երկու կետ: 36. 10,3սմ, կամ 103մմ: 37. ա) 3,5սմ, բ) 36մմ, կամ 3,6սմ: 38. 25,5սմ կամ 1,5սմ: 39. 9սմ կամ 23սմ: 40. $BD = 47$սմ, $DA = 17$սմ: 41. 3,3դմ, 6,4դմ կամ 4,7դմ, 1,6դմ: 42. 8սմ, 12սմ: 44. ա) $AC = 1$սմ, $CB = 1$սմ, $AO = 0{,}5$սմ, $OB = 1{,}5$սմ, բ) $AB = 6{,}4$մ, $AC = 3{,}2$մ, $AO = 1{,}6$մ, $OB = 4{,}8$մ: 45. 10,5սմ: 46. ա) 10,5սմ, բ) 1,5սմ: 47. $\frac{a}{2}$: 48. 4սմ: 52. Ոչ: Կառուցումը հնարավոր է, եթե AOB անկյունը բութ չէ: 53. Այո: 55. ա) 121°, բ) $121^\circ\ 2'$: 56. 48°: 57. 85°: 58. 81°: 59. 60°: 60. 160°: 61. Ոչ: 66. ա) 69°, բ) 90°, գ) 165°: 67. Ուղիղ: 68. Այո: 69. Այո: 70. ա) 70° և 110°, բ) 150° և 30°, գ) $113^\circ\ 39'$ և $66^\circ\ 21'$, դ) 135° և 45°, ե) 100° և 80°: 71. $\angle BOC=50^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$: 72. $\angle BOC = 60^\circ$, $\angle AOC = 150^\circ$: 73. 106°: 74. ա) $\angle 1 = \angle 3 = 63^\circ$, $\angle 4 = 117^\circ$, բ) $\angle 1 = 43^\circ\ 27'$, $\angle 2 = \angle 4 = 136^\circ\ 33'$: 75. ա) 57°, 57°, 123°, 123°, բ) 40°, 40°, 140°, 140°: 76. ա) $\angle 2 = \angle 4 = 110^\circ$,

$\angle 1 = \angle 3 = 70°$, բ) $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 2 = \angle 4 = 135°$, գ) $\angle 1 = \angle 3 = 75°$, $\angle 2 = \angle 4 = 105°$: 77. 180°: 78. $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$: 79. Ո՛չ: 81. Վեց ուղիղ: 82. Վեց կետ: 83. Տասներկու անկյուն: 84. ա) 8սմ, բ) 16սմ: 85. Եթե $D \in AB$ հատվածին, ապա $AD = 10{,}5$սմ, եթե $B \in AB$ ուղղին, և B կետը գտնվում է A և D կետերի միջև, ապա $AD = 21$սմ: 86. 16սմ կամ 4սմ: 87. ա) $\frac{7}{8}a$, բ) $\frac{5}{8}a$: 88. ա) $\frac{2}{3}m$, բ) $\frac{4}{5}m$ 89. 12սմ: 90. *Ցուցում*: Քննարկել երկու հնարավոր դեպք. B և C կետերը գտնվում են A կետի տարբեր կողմերում կամ միևնույն կողմում: 91. 85° կամ 15°: 92. 30° կամ 90°: 93. ա) 67° 30′, 112° 30′, բ) 72° 30′, 107° 30′, գ) 72°, 108°: 94. 90°: 96*. *Ցուցում*: Ապացուցել, որ $\angle ABD$–ն փռված է: 97. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ m և n ուղիղները համընկնում են, և օգտվել 12 կետի պնդումից:

ԳԼՈՒԽ II

101. 75սմ: 102. 12,7սմ և 17,3սմ: 103. Ոչ: 104. բ) 42°, 47°: 105. բ) $BD = 5$սմ, $AB = 15$սմ: 106. բ) $AB = 14$սմ, $BC = 17$սմ: 107. բ) 110°: 117. բ) 46°: 118. բ) 96°: 119. 10սմ, 20սմ և 20սմ: 120. 12սմ, 12սմ, 21սմ: 121. AB=12,5սմ և $BC = 15$սմ: 122. 8սմ: 125. 50°: 126. բ) 37° 30′: 128. $\angle A = \angle B + \angle C$: 132. $KF = 8$սմ,

$\angle DEK = 86^\circ$, $\angle EFD = 90^\circ$: 134. բ) $BC = 15$սմ, $CO = 13$սմ: 135. բ) $AB = 11$սմ, $BC = 19$սմ: 139. 13սմ: 150. 25°: 156. *Ցուցում*: Քննարկել երկու դեպք. A և B կետերը գտնվում են՝ ա) DC ուղղի տարբեր կողմերում, բ) DC ուղղի նույն կողմում: 159. 90°: 161. 29սմ: 166. Ոչ: 183. $AB = 4$սմ, $AC = 5$սմ, $BC = 6$սմ: 184. 7սմ, 5սմ և 5սմ: 185. 10սմ կամ 6սմ: 186. 135°: 189. *Ցուցում*: բ) Դիցուք M–ը AB ուղղի վրա չգտնվող A և B կետերից հավասարահեռ կետ է: Օգտվել «հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագիծը բարձրություն է» պնդումից: 194. *Ցուցում*: բ) Ապացուցել, որ $\triangle AOK = \triangle BOK_1$: 195. *Ցուցում*: Օգտվել 194 խնդրից: 196. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել DBF, FCE և EAD եռանկյունների հավասարությունը: 197. 40°: 198. *Ցուցում*: Ապացուցել, որ $\triangle ABO = \triangle FEO$: 199. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունների հավասարությունը: 200. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել ABC և ADC եռանկյունների հավասարությունը: 201. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել ABC և ABD եռանկյունների հավասարությունը: 202*. *Ցուցում*: Դիցուք BAD–ն ABC եռանկյան A անկյանը կից անկյունն է: $\angle BAD > \angle B$ անհավասարությունը ապացուցելու համար նշել AB հատվածի O միջնակետը և CO հատվածի շարունակության վրա տեղադրել CO հատվածին հավասար OE հատվածը: Այնուհետև ապացուցել, որ BAE անկյունը հավասար է ABC եռանկյան B անկյանը, և օգտվել $\angle BAD > \angle BAE$ անհավասարությունից: 203*. *Ցուցում*: ABC եռանկյունը վերադրել $A_1B_1C_1$ եռանկյան վրա այնպես, որ BC կողմը համընկնի B_1C-ին, իսկ BA կողմը վերադրվի BA_1 ճառագայթի վրա: Ապացուցելու համար այն բանը, որ A կետը կհամընկնի A_1 կետին, օգտվել 202* խնդրից: 204*. *Ցուցում:* Սկզբում ապացուցել, որ $\triangle AOD = \triangle BOC$, իսկ հետո՝ $\triangle EBD = \triangle EAC$ և $\triangle ODE = \triangle OEC$: 205*. *Ցուցում:* Դիտարկել ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունները, որոնց D և D_1 կետերը այնպիսին են, որ M-ը և M_1-ը AD և A_1D_1 հատվածների միջնակետերն են: 206*. *Ցուցում:* Դիցուք B կետը գտնվում է AC հատվածի վրա: Ենթադրել, որ $AD = BD = CD$: Օգտվելով հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունների հավասարության հատկությունից, սկզբում ապացուցել, որ $\angle ABD = \angle CBD = 90°$: 207*. *Ցուցում:* Սկզբում ապացուցել, որ $BP = CQ$, որի համար ցույց տալ, որ $\triangle BPX = \triangle CQX$: 215. *Ցուցում:* Կառուցել AC հատվածի միջնուղղահայացը:

ԳԼՈՒԽ III

222. 105°, 105°: 223. 106°, 74°: 230. Մեկ ուղիղ: 231. Երեք կամ չորս: 232. Այո, եթե c-ն ուղղահայաց չէ a-ին: 235. 60°: 236. $a \parallel c$: 237. բ) Չորս անկյունը՝ 55°, մյուս չորս անկյունը՝ 125°: 239. 92°: 240. ա) Այո, բ) ոչ: 241. ա) Ոչ, բ) այո: 242. 115° և 65°: 243. $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 135°$: 252. 59°: *Ցուցում:* Սկզբում

ապացուցել, որ $a \parallel b$: 253. 48°, 66°, 66°: 255. Այո: 257. 140°: 258*. *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ: 259. *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ: 260. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել, որ $AM \parallel BC$ և $AN \parallel BC$:

ԳԼՈՒԽ IV

262. ա) 58°, բ) 26°, գ) $180° - 3\alpha$, դ) 60°: 263. $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$: 266. ա) 36°, 72° և 72°, բ) 45°, 45° և 90°: 267. ա) 40°, 40° և 100° կամ 40°, 70° և 70°, բ) 60°, 60° և 60°, գ) 100°, 40° և 40°: 268. 105°: 269. 103°: 270. *Ցուցում*: Օգտվել հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունների հատկությունից: 271. Այո: 272. *Ցուցում*: Հաշվի առնել, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի հանդիպակաց գագաթին հարակից արտաքին անկյունը երկու անգամ մեծ է հիմքին առընթեր անկյունից: 273. 57° 30′, 57° 30′, 65° կամ 65°, 65°, 50°: 274. 73° 20′, 73° 20′ և 33° 20′: 276. 135°: 289. ա) Ոչ, բ) ոչ: 290. 10սմ-ի հավասար կողմը: 291. ա) 5սմ կամ 3սմ, բ) 8սմ, գ) 10սմ: 294. 29սմ և 29սմ: 295. 7սմ, 7սմ և 11սմ: 296. 45°, 45° և 90°: 297. 27°: 298. 17,6սմ: 299. $AC = 6$սմ, $AB = 12$սմ: 300. 9սմ: 301. 18սմ: 302. 30°, 30° և 120°: 303. *Ցուցում*: Օգտվել 36 կետի առաջին թեորեմից: 304. *Ցուցում*: Օգտվել ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշներից: 305. 70°, 70° և 40°: 306. 122°: 307. 90°, 39° և 51°: 309. *Ցուցում*: Սկզբում

ապացուցել, որ տրված եռանկյունների հավասար կողմերին առընթեր անկյունները հավասար են: 311. *Ցուցում*: Օգտվել 310 խնդրից: 313. 8սմ: 314. 12սմ: 315. 14սմ: 317. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել, որ *CM*–ը *ABC* եռանկյան կիսորդն է: 319. 2սմ կամ 8սմ: 320. 3սմ: 321. *Ցուցում*: Խնդրի պայմաններին բավարարող կետերից մեկով տանել տրված ուղղին զուգահեռ որևէ *d* ուղիղ և օգտվել կետ 39–ի թեորեմից: 322. *BC* կողմին զուգահեռ ճառագայթ, որի սկզբնակետը գտնվում է *BA* կողմի վրա: *Ցուցում*: Օգտվել 321 խնդրից: 323. Տրված ուղիղներին զուգահեռ և դրանցից հավասարահեռ ուղիղ: 324. *Ցուցում*: Օգտվել 323 խնդրից: 325. Երկու ուղիղներ, որոնք զուգահեռ են տրված ուղղին և տեղադրված են դրա տարբեր կողմերում՝ տրված հեռավորությամբ: 327. ա) 2, բ) 3: 328. 4: 332. ա) 24սմ–ից փոքր, բ) 10,4սմ–ից փոքր, բայց 0,2սմ–ից մեծ: 333. 12սմ: 334. 23սմ: 337. *Ցուցում*: Օգտվել 335 խնդրից: 345. 20°: 346. *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ: 348. *Ցուցում*: ա) Ենթադրել, որ $HM_1 \neq HM_2$ և օգտվել 347 խնդրից, բ) ենթադրել, որ $HM_1 > HM_2$ կամ $HM_1 = HM_2$, և օգտվել 347 խնդրից: 349*. Ճանապարհի և A_1B հատվածի հատման կետը, որտեղ A_1–ը այնպիսի կետ է, որ ճանապարհին անցնում է AA_1 հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է դրան: 350*. *Ցուցում*: Դիցուք *N* կետը *BM* ուղղի և *AC* հատվածի հատման կետն է: Կիրառել եռանկյան անհավասարությունը *ABN* և *MNC* եռանկյունների նկատմամբ:

351. *Ցուցում*: Օգտվել նախորդ խնդրից: 352. *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ: 354. 18.5սմ: 357. *Ցուցում*: Դիցուք ABC եռանկյան մեջ $AC > AB$, իսկ AM–ը՝ տրված հատվածն է: Հաշվի առնել, որ ACM եռանկյան մեջ $\angle C < \angle M$: 358. Երկու ուղիղ, որոնք պարունակում են այդ ուղիղների հատումից առաջացած անկյունների կիսորդները: 359*. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ ABC–ն որոնելի եռնկյունն է, BM–ը դրա տրված միջնագիծն է: Սկզբում կառուցել BB_1C եռանկյունը, որում M կետը BB_1 կողմի միջնակետն է: 360. *Ցուցում*. բ) կառուցել տրվածին հավասար անկյուն, այնուհետև օգտվել 335 խնդրից: 361*. *Ցուցում*: Նախ կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն, որի ներքնաձիգը տրված միջնագիծն է, իսկ էջը՝ տրված բարձրության կեսը: 362. *Ցուցում*: Օգտվել 286 խնդրից: 363. *Ցուցում*: BC և AB կողմերի վրա կառուցել A_1 և C_1 կետերն այնպես, որ $BA_1 = AC_1 = CB_1$: 364*. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն, որի ներքնաձիգը հավասար է տրված կիսորդին, իսկ էջը՝ տրված բարձրությանը: 365*. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն, որի ներքնաձիգը հավասար է տրված միջնագծին, իսկ էջը՝ տրված բարձրությանը: 366*. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել C անկյան կիսորդը:

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

367. $ab = 1$: 368. $\frac{m}{n}$: 369. *Ցուցում*: Օգտվել կից անկյունների հատկությունից. $\angle hk + \angle hl = 180°$: 370. $180°$: 371. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ տրված ուղիղներից երեքը անցնում են A կետով: Օգտվելով հակասող ենթադրությունից՝ ապացուցել, որ մնացած ուղիղներից յուրաքանչյուրն անցնում է այդ կետով: 372. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ տրված կետերից երեքը գտնվում են d ուղղի վրա: Օգտվելով հակասող ենթադրությունից՝ ապացուցել, որ մնացած չորս կետերից յուրաքանչյուրը գտնվում է d ուղղի վրա: 373. *Ցուցում*: Սկզբում ապացուցել, որ $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$, որտեղ O–ն AB հատվածի միջնակետն է: 374. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ և $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$: Շարունակել AB և A_1B_1 կողմերը $BD = BC$ և $B_1D_1 = B_1C_1$ հատվածներով և դիտարկել ADC և $A_1D_1C_1$ եռանկյունները: 375. Կարող են. օրինակ՝ AB հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունը և ABD եռանկյունը, որտեղ D–ն BC կողմի վրա այնպիսի կետ է, որ $AB = AD$: 376. Կարող են. դիտարկել, օրինակ, AB հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունը և նշել AB կողմի շարունակության վրա որևէ D կետ: ADC և DBC եռանկյունները օժտված են նշված հատկությամբ, բայց հավասար չեն: 377. *Ցուցում*: Օգտվել 203* խնդրից: 378. $90° - \frac{\alpha}{2}$: 380. ա) սուրանկյուն, բ) սուրանկյուն:

381. *Ցուցում*: Օգտվել եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչություններից և եռանկյան անկյունների գումարի վերաբերյալ թեորեմից: 382. 70°: *Ցուցում*: Ենթադրել, որ O–ն A անկյան կիսորդի և BM ուղղի հատման կետն է: Սկզբում ապացուցել AOC և MOC եռանկյունների հավասարությունը: 383. *Ցուցում*: Հատվածի ծայրակետերից մեկը միացնել եռանկյան գագաթին և օգտվել 357 խնդրից: 384. *Ցուցում*: Օգտվել 202* խնդրից՝ $\angle BB_1A > \angle B_1BC = \angle ABB_1$, ինչպես նաև եռանկյան կողմերի և անկյունների առնչություններից: 385. *Ցուցում*: Շարունակել AD հատվածը մինչև BC–ի հետ հատվելը և օգտվել 357 խնդրից: 386. *Ցուցում*: Օգտվել $\angle C > \angle B$ պայմանից և գումարել $\frac{A}{2}$:
387. *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ: 388. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ ABC եռանկյան մեջ $AB > BC$, և BM–ը միջնագիծն է: BM–ի շարունակության վրա նշել այնպիսի E կետ, որ $ME = BM$ և դիտարկել ABE եռանկյունը: 389. *Ցուցում*: Օգտվել 202* խնդրից: 390. *Ցուցում*: Շարունակել BA հատվածը $AD = AC$ հատվածով և դիտարկելով DHB եռանկյունը՝ օգտվել եռանկյան անհավասարությունից: 391. *Ցուցում*: Օգտվել 346, 386 խնդիրներից: 393. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ ABC եռանկյան մեջ AM միջնագիծը և AH բարձրությունը A անկյունը բաժանում են երեք հավասար անկյունների՝ BAH, HAM և MAC: AC կողմին տանել MD ուղղահայացը և սկզբում ապացուցել, որ $MD = \frac{1}{2}\ MC$: 394. *Ցուցում*: Հաշվի առնել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը

մեծ է էջից: 395. *Ցուցում*: Օգտվել 386 և 391 խնդիրներից: 397. Ոչ, եթե $a \perp AB$ և չի անցնում AB–ի միջնակետով: Օգտվել 189 խնդրից: 398. Երկու, մեկ և ոչ մեկը: *Ցուցում*: Օգտվել 189 խնդրից: 399. Խնդիրը մեկ լուծում ունի, եթե տրված կետերը չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա, և չունի լուծում, եթե այդ կետերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա: *Ցուցում*: Օգտվել 189 խնդրից: 400. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել A_1 կետն այնպես, որ a ուղիղն անցնի AA_1 հատվածի միջնակետով և լինի դրան ուղղահայաց: Այնուհետև տանել A_1B հատվածը: 402. Չորս, երեք, երկու, մեկ և ոչ մեկը: *Ցուցում*: Օգտվել 358 խնդրից: 403. Չորս: *Ցուցում*: Օգտվել 358 խնդրից: 404. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել OAD եռանկյունը, որում $AD=R$ և $OD=2R$, որտեղ R–ը շրջանագծի շառավիղն է: 405. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ տրված են որոնելի ABC եռանկյան A անկյունը, BH բարձրությունը և եռանկյան պարագծին հավասար PQ հատվածը: Սկզբում կառուցել ABH եռանկյունը, իսկ հետո՝ AH ճառագայթի վրա D կետն այնպես, որ $AD + AB = PQ$: 406. *Ցուցում*: Սկզբում կառուցել այնպիսի եռանկյուն, որի կողմը հավասար է տրված պարագծին, իսկ դրան առընթեր անկյունները հավասար են տրված անկյունների կեսերին: 407. *Ցուցում*: Ենթադրել, որ BC–ն, $(AC + AB)$–ն, $(\angle B - \angle C)$–ն որոնելի ABC եռանկյան տարրերն են: CA կողմի շարունակության վրա A կետից դուրս տեղադրել AB հատվածին հավասար AA_1 հատվածը: Սկզբում կառուցել CBA_1 եռանկյունը ($\angle A_1BC = 90^\circ + \dfrac{\angle B - \angle C}{2}$):

ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԳԼՈՒԽ II
ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ III
ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ IV
ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

**Լևոն Սերգեյի Աթանասյան, Վալենտին Ֆյոդորի Բուտուզով,
Սերգեյ Բորիսի Կադոմցև, Էդուարդ Հենրիկի Պոզնյակ,
Իրինա Իգորի Յուդինա**

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Դասագիրք հանրակրթական
դպրոցի 7-րդ դասարանի համար

Թարգմանությունը՝ *Սարիբեկ Էլիբեկի Հակոբյանի*

**Левон Сергеевич Атанасян, Валентин Федорович Бутузов,
Сергей Борисович Кадомцев, Эдуард Генрихович Позняк,
Ирина Игоревна Юдина**

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7—го класса
(на армянском языке)
Ереван "Зангак-97" 2006

Перевод: *Сарибека Элибековича Акопяна*

Հրատարակչության տնօրեն՝ Էմին Մկրտչյան
Գեղարվեստական խմբագիր՝ Արա Բաղդասարյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Նվարդ Փարսադանյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Արևիկ Հակոբյան
Համակարգչային մուտքագրումը՝ Գոհար Խաչատրյանի

Թարգմանչի կատարած ավելացումները

Թեմաներ՝ «Բեկյալի երկարությունը», «Պատկերացում քառանիստի մասին»

Խնդիրներ՝ 3, 21, 22, 26-29, 33, 41, 42, 50, 71, 72, 85, 111, 120, 149, 162, 163, 168, 170-172, 187, 209, 210, 222-224, 235, 246-248, 256, 257, 275, 276, 293, 326-334:

Թուղթը՝ օֆսեթ: Ծավալը՝ 9 տպ. մամուլ: Տպաքանակը 55000 օրինակ

Бумага офсетная. Объем 9 п.л. Тираж 55 000 экземпляров.

«ԶԱՆԳԱԿ-97» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՀՀ, 375051, Երևան, Կոմիտասի պող. 49/2, հեռ.՝ (+37410) 23 25 28,
ֆաքս՝ (+37410) 23 25 95, էլ. փոստ՝ info@zangak.am, էլ. կայք՝ www.zangak.am
Գրախանութ՝ Երևան, Խանջյան փող. 29, հեռ.՝ 54 06 07, էլ. կայք՝ www.book.am

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗАНГАК–97»
РА, 375051, Ереван, пр. Комитаса 49/2, тел.: (+37410) 23 25 28,
факс: (+37410) 23 25 95, эл. почта: info@zangak.am, эл. сайт: www.zangak.am
Книжный магазин: г. Ереван, ул. Ханджяна 29, тел.: 54 06 07, эл. сайт: www.book.am

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО